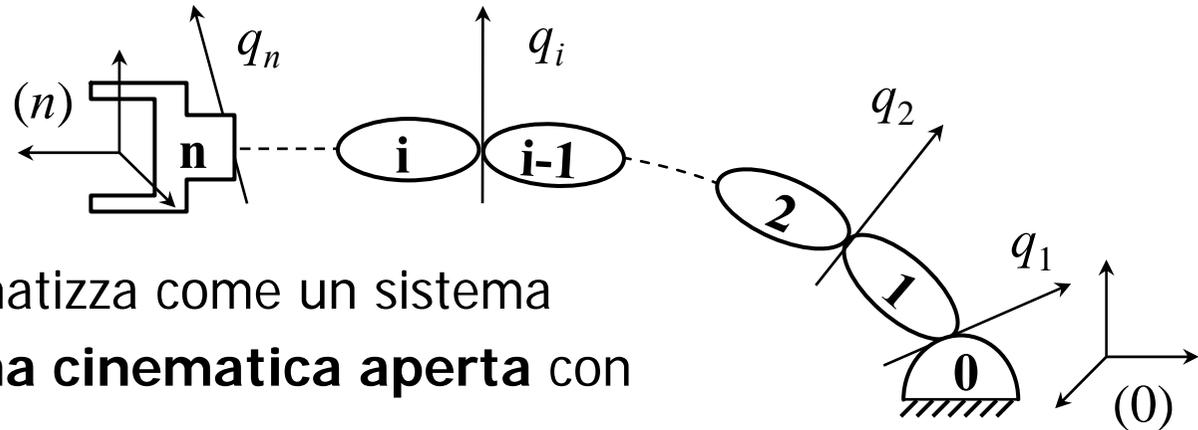


EQUAZIONI CINEMATICHE PER MANIPOLATORI

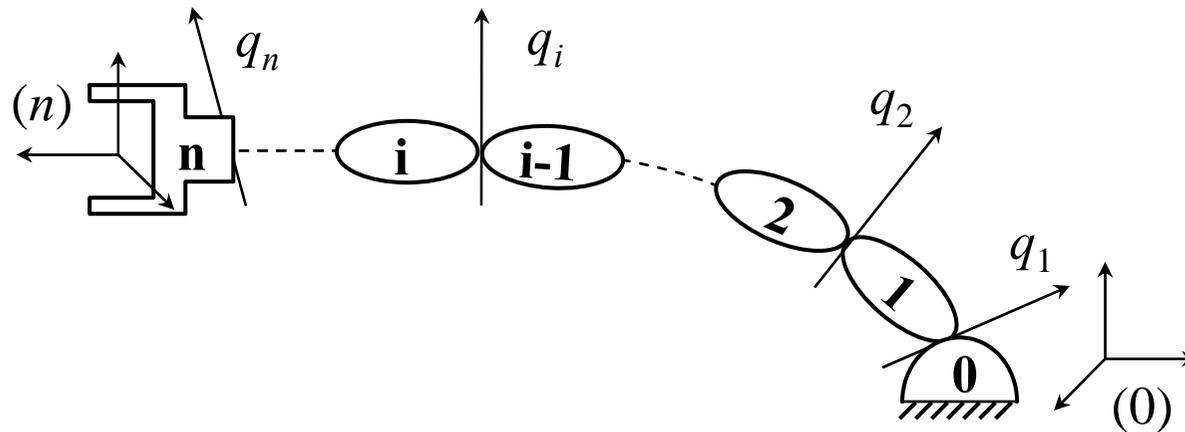


Il **manipolatore** si schematizza come un sistema multicorpo seriale a **catena cinematica aperta** con

- **membri rigidi** connessi da
- **accoppiamenti elementari** \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{prismatici} \\ \text{rotoidali} \end{array} \right.$

Procedura

- ogni terna (i) è solidale al membro $i \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{base} \rightarrow (0) \\ \text{organo terminale} \rightarrow (n) \end{array} \right.$
- ogni giunto i collega i membri $i-1$ e $i \rightarrow$ la variabile di giunto q_i
 - indica la **posizione relativa di i rispetto a $i-1$**
 - dipende dall'accoppiamento elementare $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{prismatico} \rightarrow \text{lunghezza} \\ \text{rotoidale} \rightarrow \text{angolo} \end{array} \right. 1$



Le **equazioni cinematiche** per la **posizione** si scrivono tenendo conto che la posizione

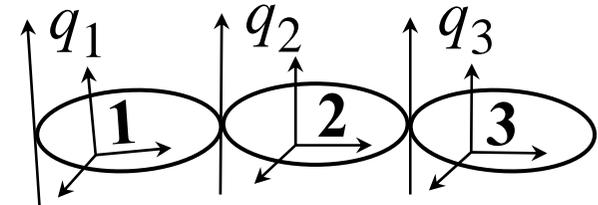
- relativa tra due membri $\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j}$ è \mathbf{M}_{ij}
- tra i membri $\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{k}$, note le posizioni tra $\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j}$ e $\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{k}$, è $\mathbf{M}_{ik} = \mathbf{M}_{ij}\mathbf{M}_{jk}$
- tra l'organo terminale \mathbf{n} e la base $(\mathbf{0})$ è

$$\mathbf{M}_{0n} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{M}_{12} \cdots \mathbf{M}_{i-1,i}\mathbf{M}_{i,i+1} \cdots \mathbf{M}_{n-2,n-1}\mathbf{M}_{n-1,n}$$

- definire una procedura conveniente per scrivere $\mathbf{M}_{i-1,i}(q_i)$

Le **equazioni cinematiche** per la **velocità** e **accelerazione** si ricavano considerando

- **3 corpi** \rightarrow **1, 2 e 3**
- un **sistema di riferimento fisso** \rightarrow **(0)**



Nota la cinematica di $1 \rightarrow (0)$, $2 \rightarrow 1$ e $3 \rightarrow 2$ si scrive

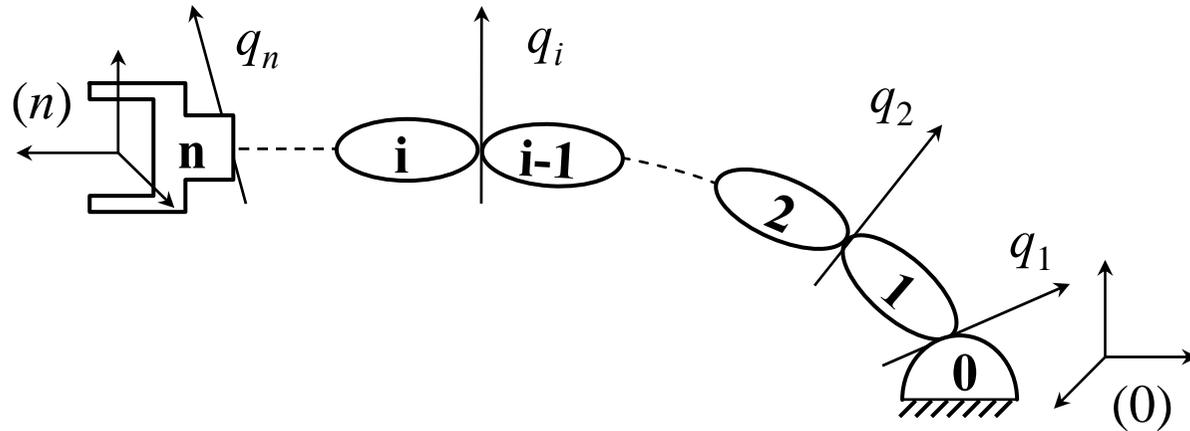
▪ **Velocità**

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{13}^{(0)} = \mathbf{W}_{12}^{(0)} + \mathbf{W}_{23}^{(0)} \\ \mathbf{W}_{03}^{(0)} = \mathbf{W}_{01}^{(0)} + \mathbf{W}_{13}^{(0)} \end{cases} \rightarrow \mathbf{W}_{03}^{(0)} = \mathbf{W}_{01}^{(0)} + \mathbf{W}_{12}^{(0)} + \mathbf{W}_{23}^{(0)} \rightarrow \boxed{\mathbf{W}_{0n}^{(0)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{W}_{i-1,i}^{(0)}}$$

▪ **Accelerazione**

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{13}^{(0)} = \mathbf{H}_{12}^{(0)} + 2\mathbf{W}_{12}^{(0)}\mathbf{W}_{23}^{(0)} + \mathbf{H}_{23}^{(0)} \\ \mathbf{H}_{03}^{(0)} = \mathbf{H}_{01}^{(0)} + 2\mathbf{W}_{01}^{(0)}\mathbf{W}_{13}^{(0)} + \mathbf{H}_{13}^{(0)} \\ \mathbf{W}_{13}^{(0)} = \mathbf{W}_{12}^{(0)} + \mathbf{W}_{23}^{(0)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{H}_{03}^{(0)} = \mathbf{H}_{01}^{(0)} + 2\mathbf{W}_{01}^{(0)}(\mathbf{W}_{12}^{(0)} + \mathbf{W}_{23}^{(0)}) + (\mathbf{H}_{12}^{(0)} + 2\mathbf{W}_{12}^{(0)}\mathbf{W}_{23}^{(0)} + \mathbf{H}_{23}^{(0)}) \\ = \mathbf{H}_{01}^{(0)} + \mathbf{H}_{12}^{(0)} + \mathbf{H}_{23}^{(0)} + 2[\mathbf{W}_{01}^{(0)}\mathbf{W}_{12}^{(0)} + (\mathbf{W}_{01}^{(0)} + \mathbf{W}_{12}^{(0)})\mathbf{W}_{23}^{(0)}] \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{H}_{0n}^{(0)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_{i-1,i}^{(0)} + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{W}_{k-1,k}^{(0)} \mathbf{W}_{j-1,j}^{(0)}}$$

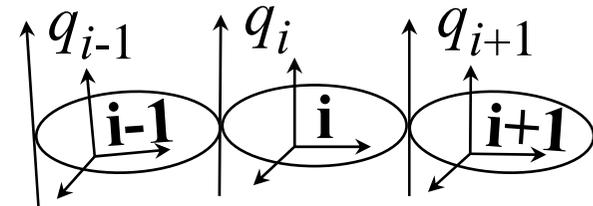


Le equazioni cinematiche per la velocità e l'accelerazione possono assumere

una diversa **forma** usando le le relazioni $\rightarrow \mathbf{W}^{(i)} = \mathbf{L}^{(i)}\dot{q}$, $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{L}^{(i)}\ddot{q} + \mathbf{L}^{(i)2}\dot{q}^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_{0n}^{(0)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{W}_{i-1,i}^{(0)} \\ \mathbf{W}_{0n}^{(0)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)} \dot{q}_i \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_{0n}^{(0)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_{i-1,i}^{(0)} + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{W}_{k-1,k}^{(0)} \mathbf{W}_{j-1,j}^{(0)} \\ \mathbf{H}_{0n}^{(0)} = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)} \ddot{q}_i + \mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)2} \dot{q}_i^2 \right) + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{L}_{k-1,k}^{(0)} \mathbf{L}_{j-1,j}^{(0)} \dot{q}_k \dot{q}_j \end{array} \right.$$

Consideriamo i membri contigui $\mathbf{i-1} \rightarrow \mathbf{i}$



- La matrice $\mathbf{M}_{i-1,i}$ dipende dalla posizione reciproca delle **terne** $(\mathbf{i-1}) \rightarrow (\mathbf{i})$ e quindi dipende
 - dalla **geometria dei membri**
 - dal **movimento relativo** tra i membri $\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{i-1}$
 - e quindi dalla **coordinata del giunto** q_i che definisce la **posizione relativa** dei membri $\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{i-1}$
- Un **posizionamento adeguato** produce una **semplificazione** di $\mathbf{M}_{i-1,i}$
- Conviene quindi stabilire delle **regole di posizionamento delle terne**
 - 1° asse (\mathbf{Z}_i) **coincidente** con l'asse del giunto $\mathbf{i+1}$ tra i membri $\mathbf{i} \leftrightarrow \mathbf{i+1}$
 - 2° asse (\mathbf{X}_i o \mathbf{Y}_i) **normale** all'asse \mathbf{Z}_{i-1} della terna $(\mathbf{i-1})$
 - 3° asse (\mathbf{Y}_i o \mathbf{X}_i) \rightarrow **terna destra**

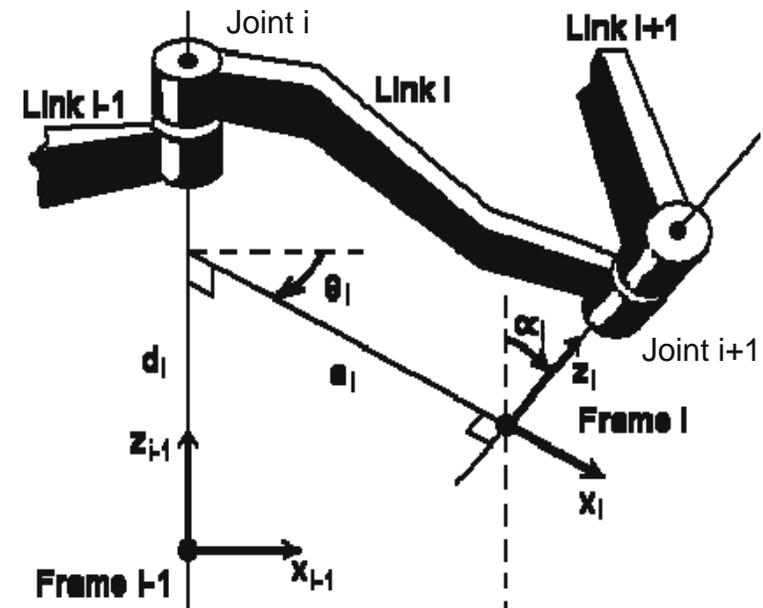
CONVENZIONE DI DENAVIT E HARTENBERG

Definisce il **posizionamento standard delle terne solidali ai membri** di un manipolatore seriale. Si considerano giunti elicoidali.

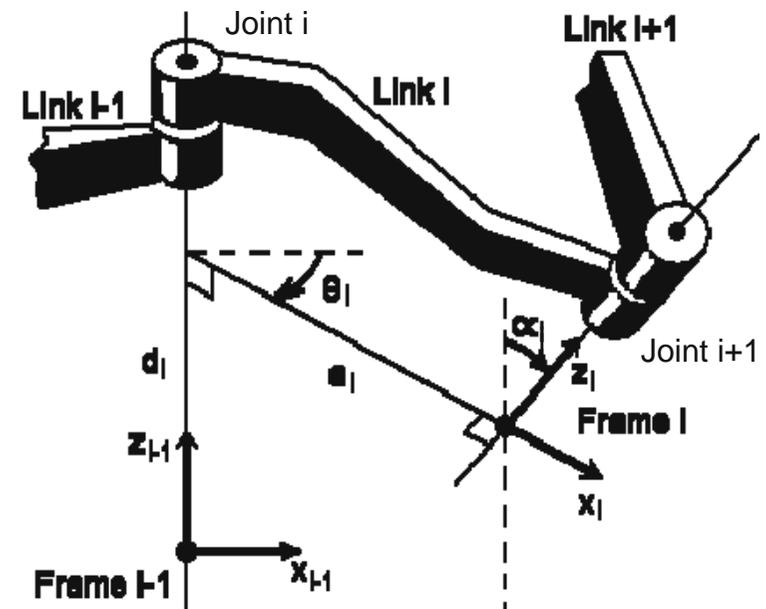
Posizionamento della terna (i)

La **terna (i)** solidale al membro i si posiziona secondo le seguenti regole

- asse Z_i **coincidente** l'asse del **giunto $i+1$**
- asse $X_i \rightarrow$ lungo la **normale comune** agli assi Z_{i-1} e Z_i dal **giunto i a $i+1$**
 - se Z_{i-1} e Z_i sono sghembi $\rightarrow X_i$ lungo la normale comune a Z_{i-1} e Z_i
 - se Z_{i-1} e Z_i si intersecano \rightarrow normale al piano di Z_{i-1} e $Z_i \rightarrow \vec{k}_{i-1} \times \vec{k}_i$
 - se Z_{i-1} e Z_i sono paralleli \rightarrow se possibile conviene X_i parallelo a X_{i-1}
 - se il **giunto i** è prismatico Z_{i-1} è parallelo al membro i e interseca Z_i in O_i
- origine $O_i \rightarrow$ **intersezione** tra Z_i e la normale comune tra gli assi Z_{i-1} e Z_i
- asse $Y_i \rightarrow$ **terna destra**



Il posizionamento delle terne secondo la convenzione esposta definisce dei **parametri** che costituiscono la **descrizione geometrica** del robot



- d_i , **offset**, distanza dell'origine di $(i-1) \rightarrow X_i$, valutata lungo Z_{i-1}
 - θ_i , **rotazione**, angolo tra $X_{i-1} \rightarrow X_i$, valutata intorno a Z_{i-1}
 - a_i , **lunghezza del braccio i**, distanza origine di $(i) \rightarrow Z_{i-1}$, valutata lungo X_i
 - α_i , **torsione del braccio i** , angolo tra $Z_{i-1} \rightarrow Z_i$, valutata intorno a X_i
- I parametri d_i e θ_i forniscono la **descrizione geometrica del giunto i**, cioè di come i membri $i-1 \rightarrow i$ sono connessi
- I parametri a_i e α_i forniscono la **descrizione geometrica del braccio i**

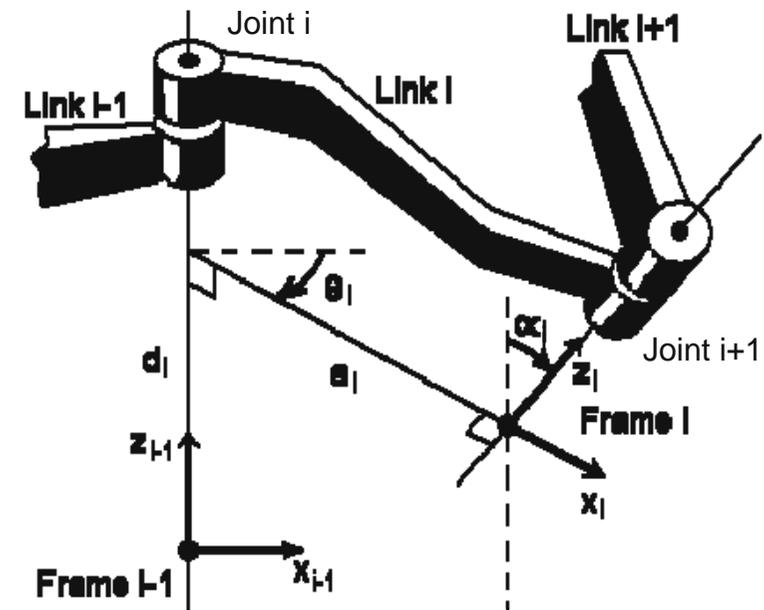
- I parametri d_i e θ_i fornendo la **descrizione del giunto i** dipendono dalla **posizione del giunto**.
- I parametri a_i e α_i fornendo la **descrizione del braccio i** sono **costanti**.

- Per il **giunto elicoidale i**
 - ❖ la **rotazione** modifica θ_i
 - ❖ la **traslazione** modifica d_i
 - ❖ La variabile q_i di giunto è **unica** e indica l'ampiezza del movimento

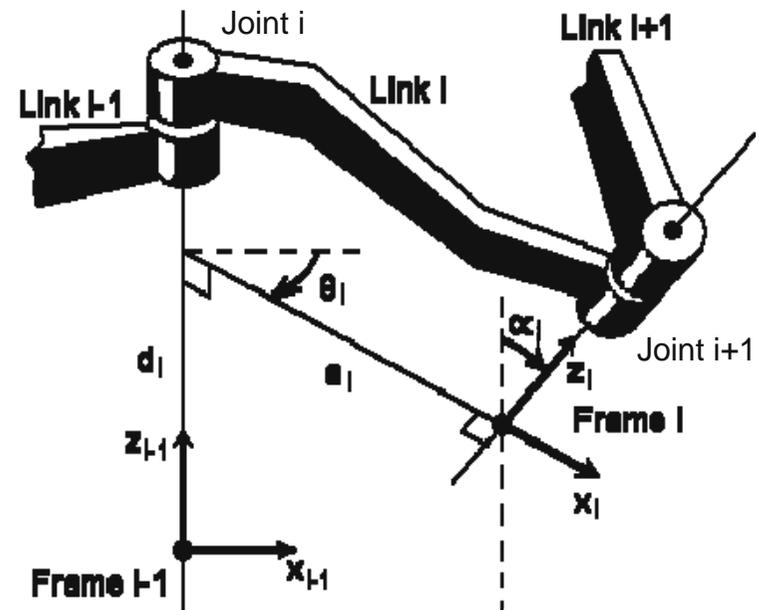
- ❖ relazioni tra la coordinata del giunto q_i e θ_i e d_i →

$$\begin{cases} \theta_i = r q_i + \theta_{0i} \\ d_i = p_i q_i + d_{0i} \end{cases}$$

- θ_{0i} valore della rotazione per $q_i = 0$
- d_{0i} valore dell'offset per $q_i = 0$
- stabiliscono la posizione del giunto per $q_i = 0$



d_i distanza $O_{(i-1)} \rightarrow X_i$, lungo Z_{i-1}
 θ_i angolo tra $X_{i-1} \rightarrow X_i$, intorno Z_{i-1}
 a_i distanza $O_{(i)} \rightarrow Z_{i-1}$, lungo X_i
 α_i angolo tra $Z_{i-1} \rightarrow Z_i$, intorno X_i

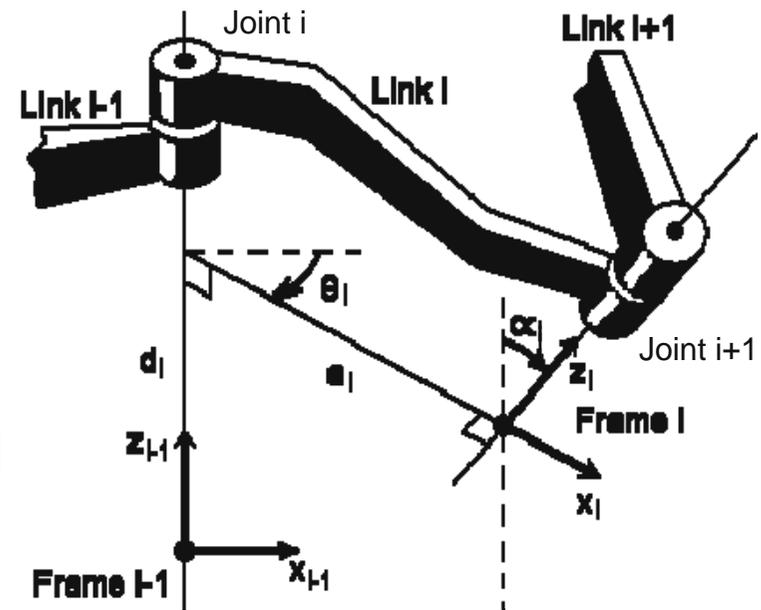


- Per il **giunto rotoidale** $\rightarrow \theta_i \Rightarrow$ **variabile**, $d_i \Rightarrow$ **costante**
- Per il **giunto prismatico** $\rightarrow d_i \Rightarrow$ **variabile**, $\theta_i \Rightarrow$ **costante**

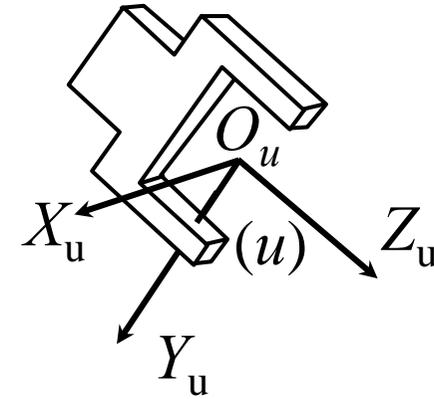
➤ In generale $\rightarrow \begin{cases} \theta_i = r_i q_i + \theta_{0i} \\ d_i = p_i q_i + d_{0i} \end{cases} \Rightarrow$

giunto	p	r
elicoidale	p_i	1
prismatico	1	0
rotoidale	0	1

- terna **(0)** → origine coincidente con l'intersezione tra l'asse Z_0 e la normale comune agli assi Z_0 e Z_1 , con questa scelta d_1 è sempre nullo; X_0 e Y_0 arbitrari
- terna **(n)** → origine coincidente con **(n-1)** e Z_n parallelo a Z_{n-1}
- rototraslazioni costanti possono essere aggiunte prima della terna **(0)** e dopo la terna **(n)**
- nei casi particolari in cui le regole precedenti lasciano delle indeterminazioni si possono effettuare delle scelte a favore della semplificazione

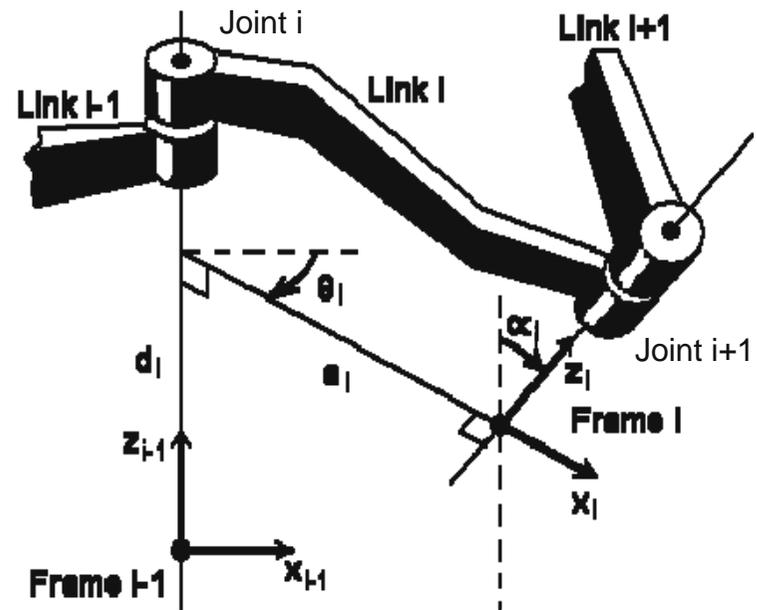


Anche se non fa esplicitamente parte della convenzione di Denavit e Hartenberg, si riporta una convenzione esistente per la collocazione della terna utensile (u)



- ❖ la terna utensile (u) si sceglie in relazione al tipo di organo terminale
- ❖ per un organo di presa tipo **pinza**
 - $O_u \rightarrow$ **centro pinza**
 - $Z_u \rightarrow$ direzione di **approccio**
 - $Y_u \rightarrow$ direzione di **scivolamento**
 - $X_u \rightarrow$ normale a Z_u e Y_u per formare una **terna destra**
- ❖ ciò comporta che in genere la terna (n) \neq (u) \rightarrow si introduce un'ulteriore matrice di posizione $M_{n,u}$ che però è **costante**

d_i distanza $O_{(i-1)} \rightarrow X_i$, lungo Z_{i-1}
 θ_i angolo tra $X_{i-1} \rightarrow X_i$, intorno Z_{i-1}
 a_i distanza $O_{(i)} \rightarrow Z_{i-1}$, lungo X_i
 α_i angolo tra $Z_{i-1} \rightarrow Z_i$, intorno X_i



- esprime la posizione della **terna (i)** rispetto alla **terna (i-1)** e quindi del braccio **i** rispetto il braccio **i-1**
- può essere pensata come derivante da **4 rototraslazioni successive**
 $(i-1) \rightarrow (i-1') \rightarrow (i-1'') \rightarrow (i-1''') \rightarrow (i)$
- dalla relazione $\mathbf{Q}^{(i-1)} = \mathbf{Q}^{(i)} = \mathbf{M}_{i-1,i}$ e dalla regola di **composizione** di $\mathbf{Q}^{(i)}$ secondo una **terna corrente** si ha

$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \mathbf{Q}_z^{(i-1)}(0, d_i) \mathbf{Q}_{z'}^{(i-1')}(\theta_i, 0) \mathbf{Q}_{x''}^{(i-1'')}(0, a_i) \mathbf{Q}_{x'''}^{(i-1''')}(0, \alpha_i)$$

$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \mathbf{Q}_z^{(i-1)}(0, d_i) \mathbf{Q}_{z'}^{(i-1')}(\theta_i, 0) \mathbf{Q}_{x''}^{(i-1'')}(0, a_i) \mathbf{Q}_{x'''}^{(i-1''')}(\alpha_i, 0)$$

- Ponendo $s\alpha_i = \sin\alpha_i$, $c\alpha_i = \cos\alpha_i$ e $s\theta_i = \sin\theta_i$, $c\theta_i = \cos\theta_i$ si scrive

$$\mathbf{Q}_z^{(i-1)}(0, d_i) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_1 & \mathbf{T}_1 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \mathbf{Q}_{z'}^{(i-1')}(\theta_i, 0) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_2 & \mathbf{T}_2 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{Q}_{x''}^{(i-1'')}(0, a_i) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_3 & \mathbf{T}_3 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \mathbf{Q}_{x'''}^{(i-1''')}(\alpha_i, 0) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_4 & \mathbf{T}_4 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- Eseguendo i prodotti si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{i-1,i} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{T}_1 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{T}_3 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_4 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_2 & \mathbf{T}_1 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_4 & \mathbf{T}_3 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_2\mathbf{R}_4 & \mathbf{R}_2\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_1 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

- Esplicitando le sottomatrici

$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_4 & & \mathbf{R}_2 \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_1 & \\ \hline \mathbf{0} & & & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix} & \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} a_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

- si ottiene la **matrice di posizione per due terne consecutive**

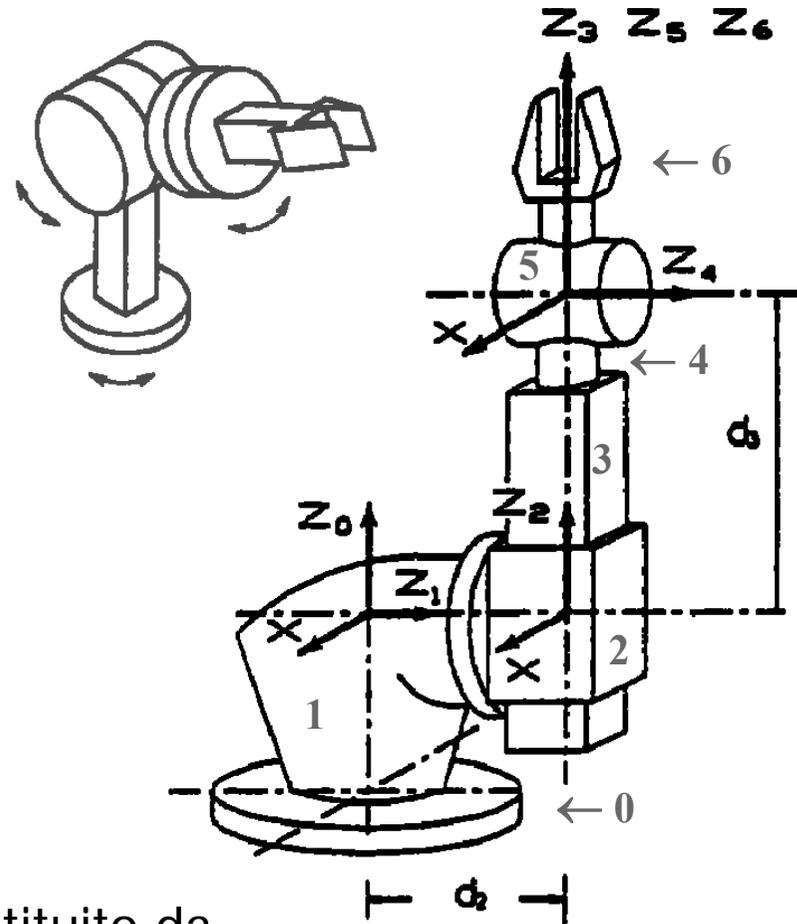
$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- la matrice $\mathbf{M}_{i-1,i}$ dipende da 4 grandezze d_i , θ_i , a_i , α_i mentre la posizione relativa di 2 corpi nello spazio dipende da 6 gradi di libertà \rightarrow la scelta della terna (i) rispetto alla terna ($i-1$) è vincolata dalla convenzione di D&H
- la convenzione di D&H descrive geometricamente un robot con una tabella dei valori di d_i , θ_i , a_i , α_i

D & H PER IL MANIPOLATORE DI STANFORD

d_i distanza $O_{(i-1)} \rightarrow X_i$, lungo Z_{i-1}
 θ_i angolo tra $X_{i-1} \rightarrow X_i$, intorno Z_{i-1}
 a_i distanza $O_{(i)} \rightarrow Z_{i-1}$, lungo X_i
 α_i angolo tra $Z_{i-1} \rightarrow Z_i$, intorno X_i

$$M_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

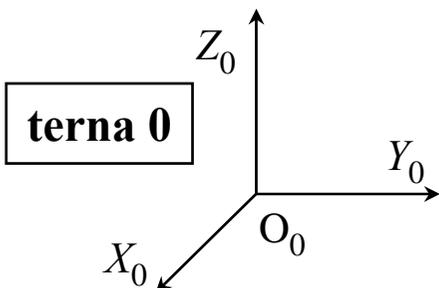
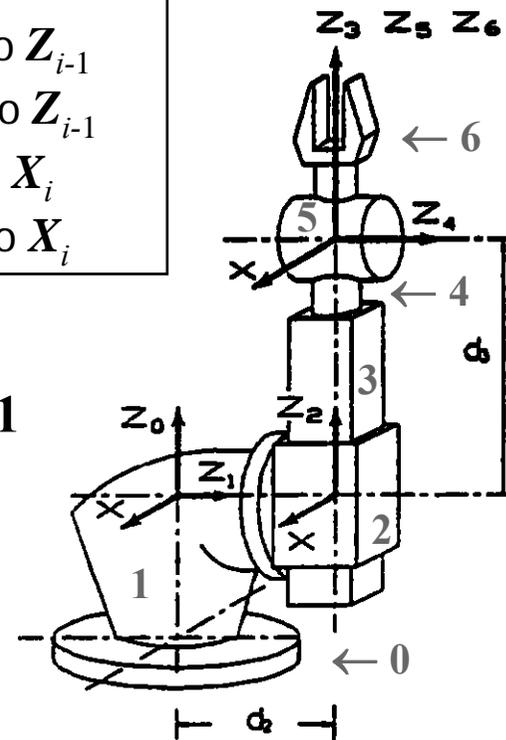


Manipolatore con **6 gradi di libertà** e costituito da

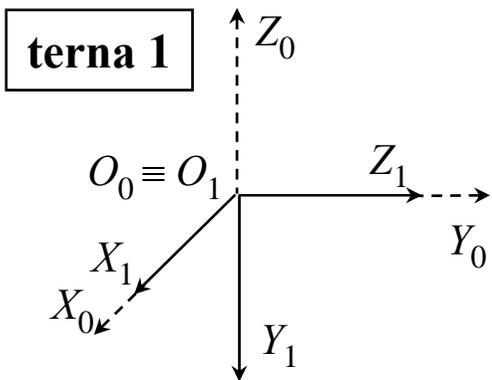
- **struttura portante sferica** → { 2 coppie rotoidali
1 coppia prismatica
- **polso sferico** → 3 coppie rotoidali

$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d_i , $O_{(i-1)} \rightarrow X_i$, lungo Z_{i-1}
 θ_i , $X_{i-1} \rightarrow X_i$, intorno Z_{i-1}
 a_i , $O_{(i)} \rightarrow Z_{i-1}$, lungo X_i
 α_i , $Z_{i-1} \rightarrow Z_i$, intorno X_i



- Z_0 coincidente asse rotoidale tra **0** e **1**
- X_0 arbitrario
- $O_0 \equiv O_1$
- gli altri parametri non sono definiti



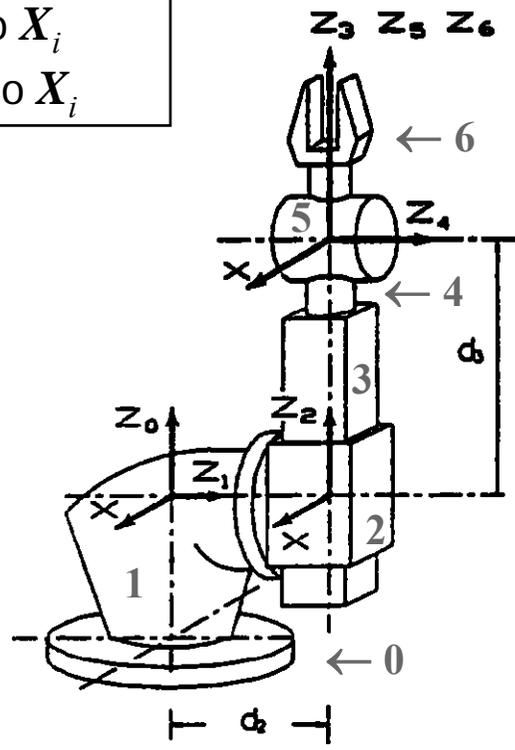
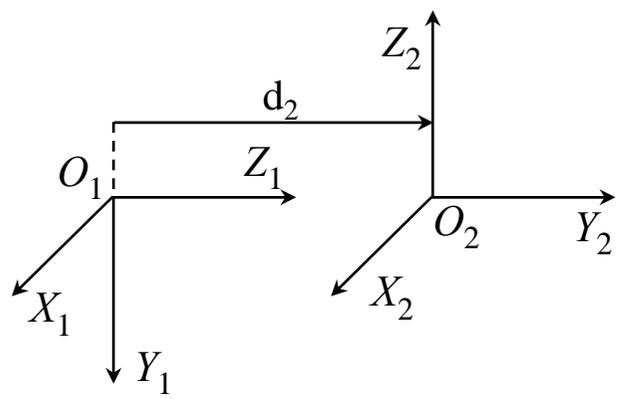
- Z_1 coincidente asse rotoidale tra **1** e **2**
- X_1 normale al piano di Z_0 e Z_1
- O_1 intersezione tra Z_0 e Z_1
- $d_1 = 0$, $\theta_1 = \text{variabile } q_1$
- $a_1 = 0$, $\alpha_1 = -90^\circ$

$$\mathbf{M}_{01} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$d_i, O_{(i-1)} \rightarrow X_i$, lungo Z_{i-1}
 $\theta_i, X_{i-1} \rightarrow X_i$, intorno Z_{i-1}
 $a_i, O_{(i)} \rightarrow Z_{i-1}$, lungo X_i
 $\alpha_i, Z_{i-1} \rightarrow Z_i$, intorno X_i

terna 2



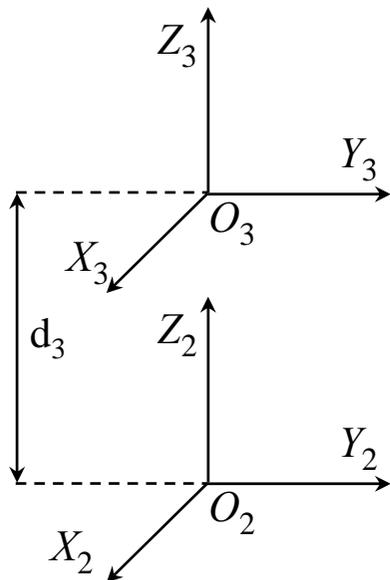
- Z_2 coincidente asse prismatico tra 2 e 3
- X_2 normale al piano di Z_1 e Z_2
- O_2 intersezione tra Z_1 e Z_2
- $d_2 = d_2, \theta_2 = \text{variabile } q_2$
- $a_2 = 0, \alpha_2 = 90^\circ$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

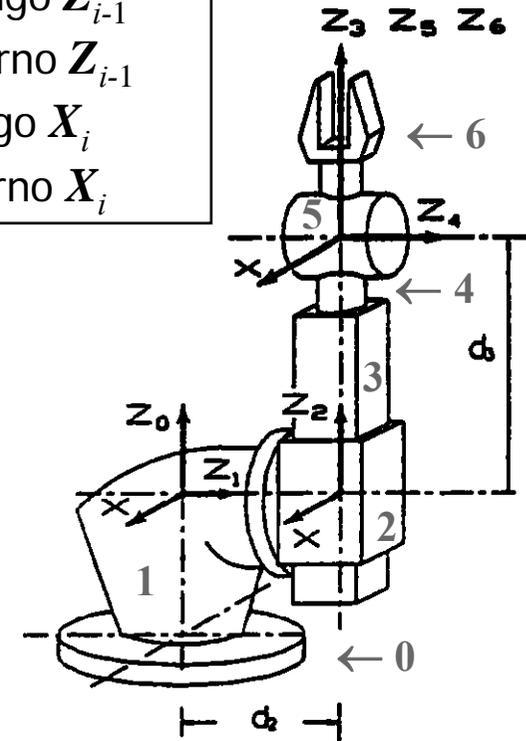
$$M_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d_i , $O_{(i-1)} \rightarrow X_i$, lungo Z_{i-1}
 θ_i , $X_{i-1} \rightarrow X_i$, intorno Z_{i-1}
 a_i , $O_{(i)} \rightarrow Z_{i-1}$, lungo X_i
 α_i , $Z_{i-1} \rightarrow Z_i$, intorno X_i

terna 3



$$M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

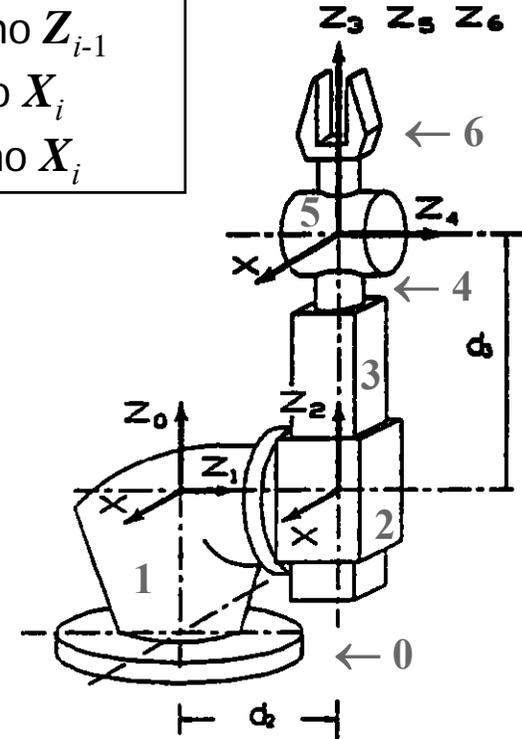
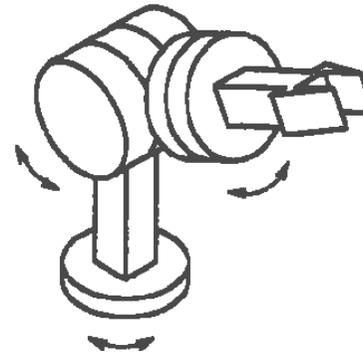
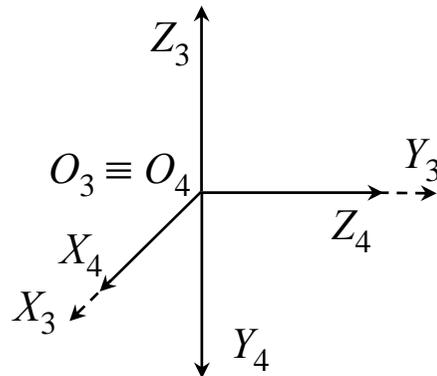


- Z_3 coincidente asse rotoidale tra 3 e 4
- X_3 parallelo a X_2
- O_3 posizione di riferimento per la traslazione
- $d_3 = \text{variabile } q_3, \theta_3 = 0^\circ$
- $a_3 = 0, \alpha_3 = 0^\circ$

$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$d_i, O_{(i-1)} \rightarrow X_i$, lungo Z_{i-1}
 $\theta_i, X_{i-1} \rightarrow X_i$, intorno Z_{i-1}
 $a_i, O_{(i)} \rightarrow Z_{i-1}$, lungo X_i
 $\alpha_i, Z_{i-1} \rightarrow Z_i$, intorno X_i

terna 4



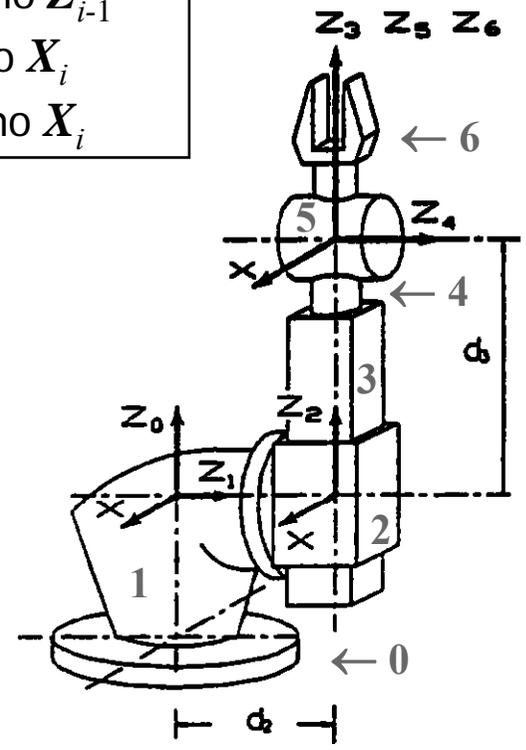
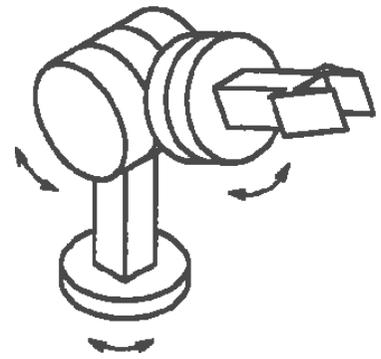
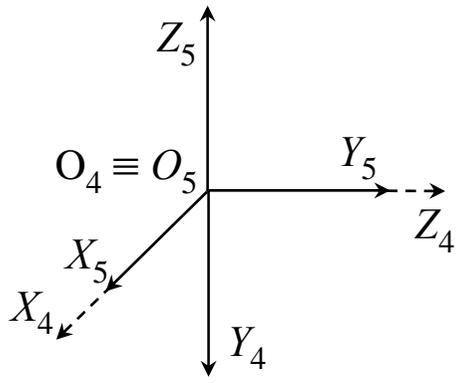
- Z_4 coincidente asse rotoidale tra 4 e 5
- X_4 normale al piano di Z_3 e Z_4
- O_4 intersezione tra Z_3 e Z_4
- $d_4 = 0, \theta_4 = \text{variabile } q_4$
- $a_4 = 0, \alpha_4 = -90^\circ$

$$\mathbf{M}_{34} = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

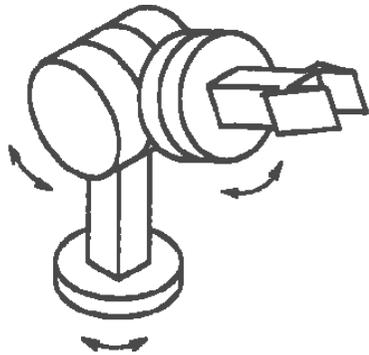
$d_i, O_{(i-1)} \rightarrow X_i$, lungo Z_{i-1}
 $\theta_i, X_{i-1} \rightarrow X_i$, intorno Z_{i-1}
 $a_i, O_{(i)} \rightarrow Z_{i-1}$, lungo X_i
 $\alpha_i, Z_{i-1} \rightarrow Z_i$, intorno X_i

terna 5

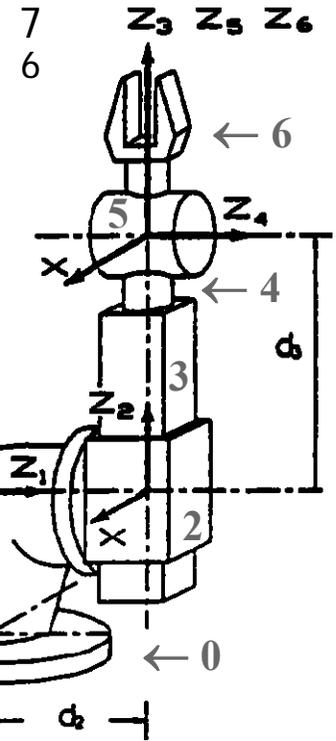


- Z_5 coincidente asse rotoidale tra **5** e **6**
- X_5 normale al piano di Z_4 e Z_5
- O_5 intersezione tra Z_4 e Z_5
- $d_5 = 0, \theta_5 = \text{variabile } q_5$
- $a_5 = 0, \alpha_5 = 90^\circ$

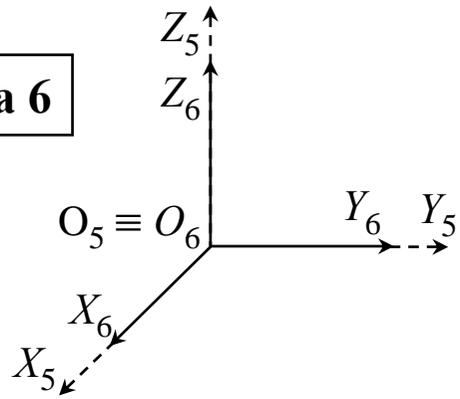
$$\mathbf{M}_{45} = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



terna 6



- Z_6 parallelo a Z_5
- O_6 coincidente con O_5
- X_6 parallelo a X_5
- $d_6 = 0$, $\theta_6 = \text{variabile } q_6$
- $a_6 = 0$, $\alpha_6 = 0^\circ$

$$\mathbf{M}_{56} = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ponendo $s_i = \sin \theta_i$ e $c_i = \cos \theta_i$

$$\mathbf{M}_{06} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$q_1 = \theta_1$ $q_2 = \theta_2$ $q_3 = d_3$ $q_4 = \theta_4$ $q_5 = \theta_5$ $q_6 = \theta_6$ 21

SPOSTAMENTO INFINITESIMO DELL'EFFETTORE

- Per esprimere il **legame tra gli spostamenti infinitesimi dei giunti e dell'organo terminale** è utile ricordare che la matrice \mathbf{M}_{0k} descrive la posizione del membro k rispetto al riferimento $(\mathbf{0})$

$$\mathbf{M}_{0k}(q_1, \dots, q_k) = \mathbf{M}_{01}(q_1) \mathbf{M}_{12}(q_2) \cdots \mathbf{M}_{i-2,i-1}(q_{i-1}) \mathbf{M}_{i-1,i}(q_i) \mathbf{M}_{i,i+1}(q_{i+1}) \cdots \mathbf{M}_{k-1,k}(q_k)$$

e quindi \mathbf{M}_{0k} dipende dalle variabili ai giunti q_1, q_k , cioè dipende dalla q_i generica solo se $i \leq k$

- ricordando
 - ✓ l'espressione $d\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{L}^{(0)} \mathbf{P}^{(0)} dq$ dello spostamento infinitesimo
 - ✓ che \mathbf{M}_{0n} contiene i punti notevoli della terna utensile rispetto a $(\mathbf{0})$
 - ✓ che le rototraslazioni infinitesime successive si sommano
 - ✓ si può dire che lo spostamento infinitesimo dell'organo terminale è la somma delle rototraslazioni infinitesime dei giunti

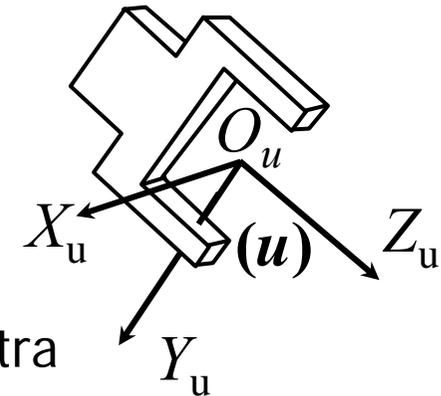
$$d\mathbf{M}_{0n} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)} dq_i \right) \mathbf{M}_{0n}$$

PROBLEMA CINEMATICO DIRETTO E INVERSO

Per mostrare l'**impostazione** e i **metodi di soluzione** dei vari **problemi cinematici** è opportuno stabilire alcune posizioni

- Per semplicità consideriamo il **moto** del solo **organo terminale**
- Adottiamo una **rappresentazione in forma minima** della posa dell'organo terminale
- La **terna utensile (u)** si sceglie in base al tipo di organo terminale
- Per esempio per un organo di presa tipo pinza si sceglie

- $O_u \rightarrow$ centro pinza
- $Z_u \rightarrow$ direzione di approccio
- $Y_u \rightarrow$ direzione di scivolamento
- $X_u \rightarrow$ normale a Z_u e Y_u per formare una terna destra



- In genere la **terna (n)** \neq (u) \rightarrow si introduce quindi un'ulteriore matrice di posizione $M_{n,u}$ **costante**

Le grandezze di interesse nel **sistema cartesiano esterno** si scrivono

➤ **Coordinate del centro pinza** $\rightarrow \mathbf{O}_u = \{ x_p \quad y_p \quad z_p \}^T$

➤ **Angoli di Eulero Z X Z** $\rightarrow \{ \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \}^T$

▪ matrice di rotazione $\rightarrow \mathbf{R}_E = \begin{bmatrix} c_1 c_3 - s_1 c_2 s_3 & -c_1 s_3 - s_1 c_2 c_3 & s_1 s_2 \\ s_1 c_3 + c_1 c_2 s_3 & -s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3 & -c_1 s_2 \\ s_2 s_3 & s_2 c_3 & c_2 \end{bmatrix}$

➤ **Coordinate esterne** $\rightarrow \mathbf{S} = \{ \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad x_p \quad y_p \quad z_p \}^T$

➤ **Matrice di posizione** $\rightarrow \mathbf{M}_{0n}(\mathbf{S}) \longrightarrow \mathbf{M}_{0n}(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} & & & & & x_p \\ & & & & & y_p \\ & & & & & z_p \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$

➤ **Matrice delle velocità** $\rightarrow \mathbf{W}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}) = \dot{\mathbf{M}}_{0n}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}) \mathbf{M}_{0n}^{-1}(\mathbf{S})$

➤ **Matrice delle accelerazioni** $\rightarrow \mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, \ddot{\mathbf{S}}) = \ddot{\mathbf{M}}_{0n}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, \ddot{\mathbf{S}}) \mathbf{M}_{0n}^{-1}(\mathbf{S})$

Le grandezze di interesse nello **spazio dei giunti** si scrivono

➤ **Coordinate dei giunti** $\rightarrow \mathbf{Q}_g = \{ q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n \}^T$

➤ **Matrice di posizione** $\rightarrow \mathbf{M}_{0n}(\mathbf{Q}_g) \longrightarrow \mathbf{M}_{0n}(\mathbf{Q}_g) = \prod_{i=1}^n \mathbf{M}_{i-1,i}(q_i)$

➤ **Matrice della velocità** $\rightarrow \mathbf{W}_{0n}^{(0)}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g) = \dot{\mathbf{M}}_{0n}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g) \mathbf{M}_{0n}^{-1}(\mathbf{Q}_g)$

➤ **Matrice della accelerazione**



$$\mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g, \ddot{\mathbf{Q}}_g) = \ddot{\mathbf{M}}_{0n}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g, \ddot{\mathbf{Q}}_g) \mathbf{M}_{0n}^{-1}(\mathbf{Q}_g)$$

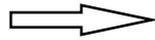
Consideriamo solamente il **moto del organo terminale**

➤ Consiste nel calcolo del moto dell'**organo terminale a partire dalle coordinate dei giunti**

- posizione $\rightarrow \mathbf{M}_{0n}(\mathbf{S}) = \mathbf{M}_{0n}(\mathbf{Q}_g)$
- velocità $\rightarrow \mathbf{W}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}) = \mathbf{W}_{0n}^{(0)}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g)$
- accelerazione $\rightarrow \mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, \ddot{\mathbf{S}}) = \mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g, \ddot{\mathbf{Q}}_g)$

➤ Si indichi con $\rightarrow \mathbf{Q}_g = \{ q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n \}^T$, $\mathbf{S} = \{ s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_6 \}^T$

➤ Per la **posizione** si ha



Incognita	Termini noti
$\mathbf{M}_{0n}(\mathbf{S})$	\mathbf{Q}_g

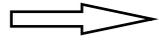
- Risulta completamente determinato una volta definite le matrici di posizione $\mathbf{M}_{i-1,i}(q_i)$ tra i membri contigui $\mathbf{i-1} \rightarrow \mathbf{i}$
- Si risolve con **procedure completamente automatiche**

$$\mathbf{M}_{0n}(\mathbf{Q}_g) = \mathbf{M}_{01}(q_1) \cdots \mathbf{M}_{i-1,i}(q_i) \cdots \mathbf{M}_{n-1,n}(q_n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{M}_{i-1,i}(q_i)$$

$$\boxed{\mathbf{M}_{0n}(\mathbf{S}) = \mathbf{M}_{0n}(\mathbf{Q}_g)}$$

- consiste in 12 equazioni scalari **lineari** nelle $s_i \rightarrow \mathbf{6}$ **indipendenti**

➤ Per la velocità



Incognita	Termini noti
$\mathbf{w}_{0n}^{(0)}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})$	$d\mathbf{Q}_g / dt$

- Risulta completamente determinato una volta definite le matrici dell'asse elicoidale $\mathbf{L}_{i-1,i}$ tra i membri contigui $\mathbf{i}-1 \rightarrow \mathbf{i}$ rispetto a una terna locale
- ricordando

$$\mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)} = \mathbf{M}_{0,i-1}(q_1, q_2, \dots, q_{i-1}) \mathbf{L}_{i-1,i}^{(i-1)} \mathbf{M}_{i-1,0}(q_1, q_2, \dots, q_{i-1})$$

- si ha

$$\mathbf{w}_{0n}^{(0)}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g) = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{i-1,i}^{(0)}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g) = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)}(\mathbf{Q}_g) \dot{q}_i$$

$$\boxed{\mathbf{w}_{0n}^{(0)}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{w}_{0n}^{(0)}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})}$$

- consiste in 12 equazioni scalari **lineari** nelle $ds_i/dt \rightarrow$ **6 indipendenti**

➤ Per l'accelerazione si ha ➡

Incognita	Termini noti
$\mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \ddot{\mathbf{s}})$	$d^2 \mathbf{Q}_g / dt^2$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g, \ddot{\mathbf{Q}}_g) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_{i-1,i}^{(0)} + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{W}_{k-1,k}^{(0)} \mathbf{W}_{j-1,j}^{(0)} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)}(\mathbf{Q}_g) \ddot{q}_i + \mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)2}(\mathbf{Q}_g) \dot{q}_i^2 \right) + \\ &+ 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{L}_{k-1,k}^{(0)}(\mathbf{Q}_g) \mathbf{L}_{j-1,j}^{(0)}(\mathbf{Q}_g) \dot{q}_k \dot{q}_j \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \ddot{\mathbf{s}}) = \mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g, \ddot{\mathbf{Q}}_g)}$$

- consiste in 12 equazioni scalari **lineari** nelle $d^2 s_i / dt^2 \rightarrow$ **6 indipendenti**

Consideriamo solamente il **moto del organo terminale**

- calcolo delle **coordinate dei giunti e delle loro derivate** $\rightarrow q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$
noto il moto dell'organo terminale $\rightarrow \mathbf{M}_{0n}(\mathbf{S}), \mathbf{W}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}), \mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, \ddot{\mathbf{S}})$
- Per la posizione in genere si risolve con **procedure laboriose**
- Per la soluzione è importante la **scelta delle coordinate esterne** impiegate per descrivere la posa dell'organo terminale
 - il numero di elementi di \mathbf{S} è pari al numero dei **GdL** della pinza
 - la posizione è definita da quella di un punto di riferimento, per esempio **il centro pinza**
 - l'orientamento offre più possibilità di scelte, ma nessuna è soddisfacente
 - ❖ le rappresentazioni minime hanno delle singolarità
 - ❖ la matrice di rotazione necessita di vincoli matematici
 - ❖ le derivate non corrispondono alle velocità angolari
 - ❖ le scelte ottimali sono diverse per la progettazione e per il controllo

➤ Per la **posizione** si ha $\Rightarrow \mathbf{M}_{0n}(\mathbf{Q}_g) = \mathbf{M}_{0n}(\mathbf{S})$

Incognita	Termini noti
\mathbf{Q}_g	$\mathbf{M}_{0n}(\mathbf{S})$

▪ **GdL** equazioni **non lineari** nelle n incognite q_i

➤ Per la **velocità** si ha $\Rightarrow \mathbf{W}_{0n}^{(0)}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g) = \mathbf{W}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}})$

Incognita	Termini noti
$d\mathbf{Q}_g/dt$	$\mathbf{W}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}})$

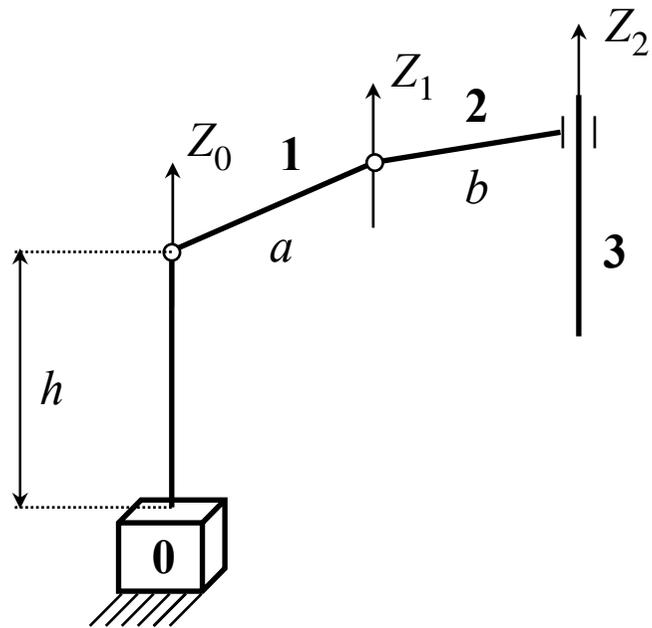
▪ **GdL** equazioni **lineari** nelle n incognite dq_i/dt

➤ Per **l'accelerazione** si ha $\Rightarrow \mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g, \ddot{\mathbf{Q}}_g) = \mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, \ddot{\mathbf{S}})$

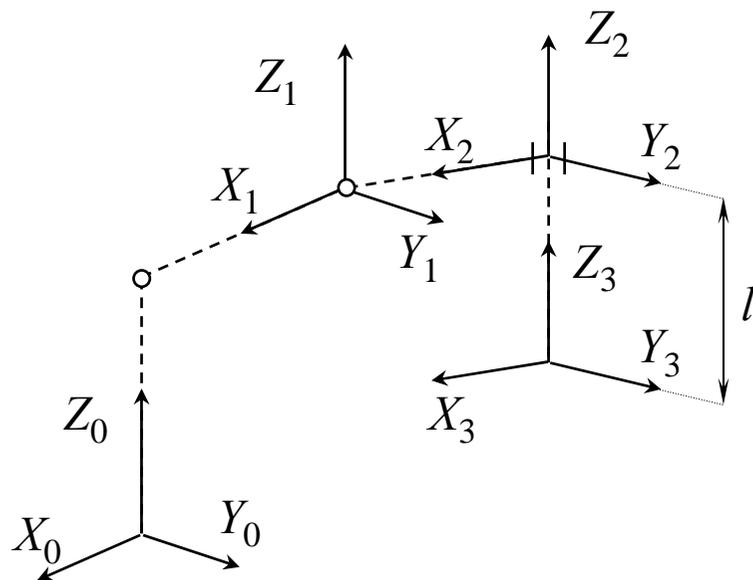
Incognita	Termini noti
$d^2\mathbf{Q}_g/dt^2$	$\mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, \ddot{\mathbf{S}})$

▪ **GDL** equazioni **lineari** nelle n incognite d^2q_i/dt^2

ROBOT SCARA CON 3 GRADI DI MOBILITÀ

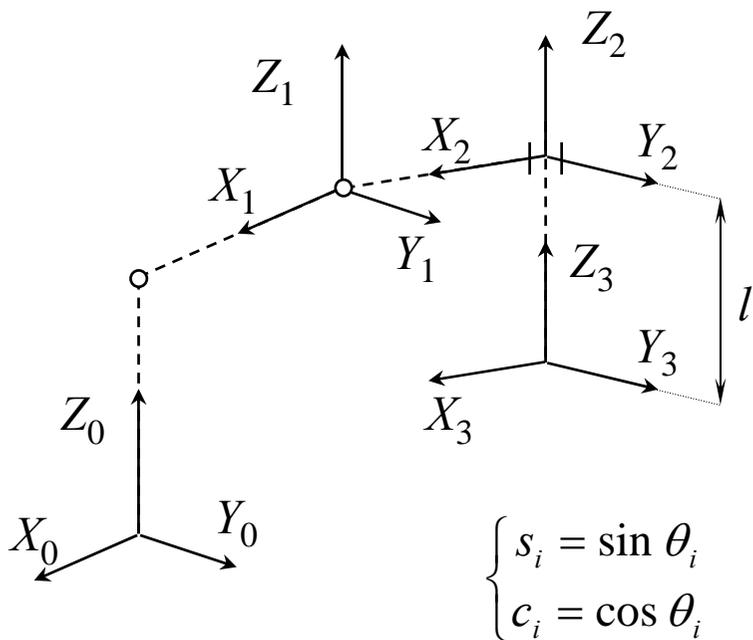


Problema diretto



d_i	$O_{(i-1)} \rightarrow X_i$	lungo Z_{i-1}
θ_i	$X_{i-1} \rightarrow X_i$	intorno Z_{i-1}
a_i	$O_{(i)} \rightarrow Z_{i-1}$	lungo X_i
α_i	$Z_{i-1} \rightarrow Z_i$	intorno X_i

- $d_1 = h$, $\theta_1 = \text{variabile}$, $a_1 = a$, $\alpha_1 = 0^\circ$
- $d_2 = 0$, $\theta_2 = \text{variabile}$, $a_2 = b$, $\alpha_2 = 0^\circ$
- $d_3 = \text{variabile}$, $\theta_3 = 0^\circ$, $a_3 = 0$, $\alpha_3 = 0^\circ$



$$\begin{cases} s_i = \sin \theta_i \\ c_i = \cos \theta_i \end{cases}$$

$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$$

- $d_1 = h$, $\theta_1 = \text{variabile}$, $a_1 = a$, $\alpha_1 = 0^\circ$
- $d_2 = 0$, $\theta_2 = \text{variabile}$, $a_2 = b$, $\alpha_2 = 0^\circ$
- $d_3 = \text{variabile}$, $\theta_3 = 0^\circ$, $a_3 = 0$, $\alpha_3 = 0^\circ$

$$\mathbf{M}_{01} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & a s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

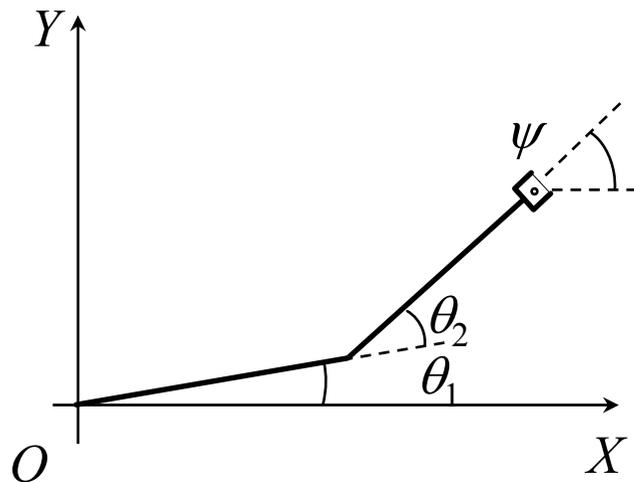
$$\mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & b c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & b s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{03} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 - s_1 s_2 & -c_2 s_1 - c_1 s_2 & 0 & b(c_1 c_2 - s_1 s_2) + a c_1 \\ c_2 s_1 + c_1 s_2 & c_1 c_2 - s_1 s_2 & 0 & b(c_2 s_1 + c_1 s_2) + a s_1 \\ 0 & 0 & 1 & h - l \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} x_p = b(c_1 c_2 - s_1 s_2) + a c_1 \\ y_p = b(c_2 s_1 + c_1 s_2) + a s_1 \\ z_p = h - l \end{cases}$$



Problema inverso

- calcolo di θ_1 , θ_2 e l nota la matrice $\mathbf{M}_{03}(\mathbf{Q})$
- la pinza ha 3 GDL quindi le 4 coordinate x_p, y_p, z_p, ψ non sono indipendenti
- nella matrice \mathbf{M}_{03} si ha $m_{11} = m_{22}$ e $m_{21} = -m_{12}$

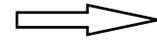
$$\mathbf{M}_{03} = \begin{bmatrix} c_1c_2 - s_1s_2 & -c_2s_1 - c_1s_2 & 0 & b(c_1c_2 - s_1s_2) + ac_1 \\ c_2s_1 + c_1s_2 & c_1c_2 - s_1s_2 & 0 & b(c_2s_1 + c_1s_2) + as_1 \\ 0 & 0 & 1 & h-l \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B & 0 & x_p \\ B & A & 0 & y_p \\ 0 & 0 & 1 & z_p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Si hanno 5 relazioni significative
 - ✓ La 5^a identifica da sola la coordinata l
 - ✓ Dalle prime 2, non indipendenti, e dalla struttura di \mathbf{M}_{03} che definisce una rotazione intorno a Z si ha

$$\begin{cases} A = c_1c_2 - s_1s_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ B = c_2s_1 + c_1s_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ x_p = b(c_1c_2 - s_1s_2) + ac_1 \\ y_p = b(c_2s_1 + c_1s_2) + as_1 \\ z_p = h - l \quad \rightarrow \quad l = h - z_p \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = c_1c_2 - s_1s_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) \rightarrow A = \cos \psi \\ B = c_2s_1 + c_1s_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2) \rightarrow B = \sin \psi \end{cases} \Rightarrow \psi = \theta_1 + \theta_2$$

✓ Restano 3 relazioni, per sole 2 coordinate indipendenti



$$\begin{cases} x_p = b(c_1c_2 - s_1s_2) + a c_1 \\ y_p = b(c_2s_1 + c_1s_2) + a s_1 \\ \psi = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$$

✓ Infatti se sono dati x_p, y_p risulta fissato l'orientamento della mano

✓ θ_2 si ottiene quadrando e sommando x_p, y_p

$$\begin{cases} x_p^2 = b^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + a^2 \cos^2 \theta_1 + 2ab \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_1 \\ y_p^2 = b^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) + a^2 \sin^2 \theta_1 + 2ab \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_1 \end{cases}$$

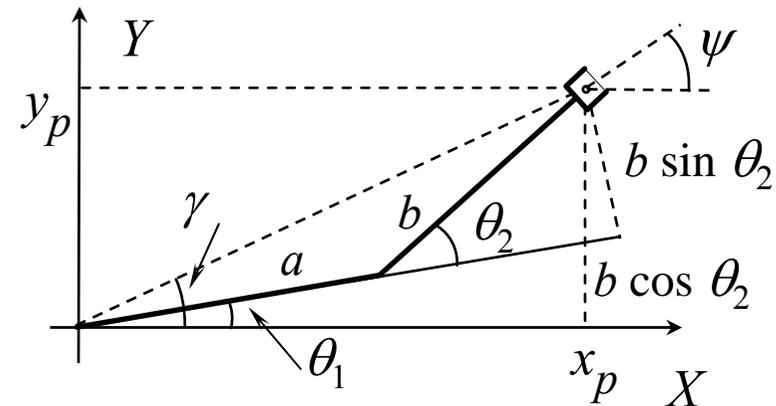
$$\begin{aligned} x_p^2 + y_p^2 &= b^2 + a^2 + 2ab[\cos(\theta_1 + \theta_2)\cos \theta_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2)\sin \theta_1] = \\ &= b^2 + a^2 + 2ab(c_1^2c_2 - s_1s_2c_1 + s_1^2c_2 + s_2c_1s_1) = b^2 + a^2 + 2ab \cos \theta_2 \end{aligned}$$

$$\theta_2 = \pm \arccos \frac{x_p^2 + y_p^2 - a^2 - b^2}{2ab}$$

✓ θ_1 si ottiene da semplici considerazioni geometriche

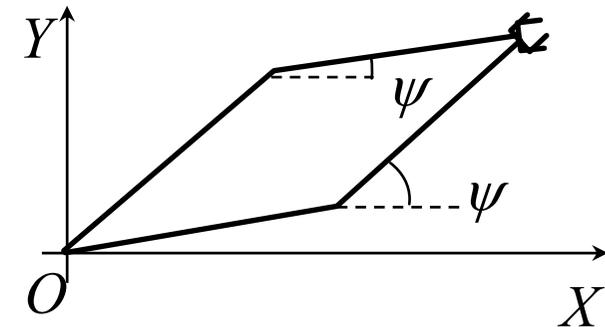
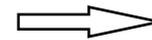
$$y_p/x_p = \tan \gamma \Rightarrow \gamma = \tan^{-1}(y_p/x_p)$$

$$\theta_1 = \gamma - \tan^{-1}\left(\frac{b \sin \theta_2}{a + b \cos \theta_2}\right)$$



✓ Risulta quindi

$$\begin{cases} \theta_2 = \pm \arccos \frac{x_p^2 + y_p^2 - a^2 - b^2}{2ab} \\ \theta_1 = \text{atan2}(y_p, x_p) - \text{atan2}(b \sin \theta_2, a + b \cos \theta_2) \end{cases}$$



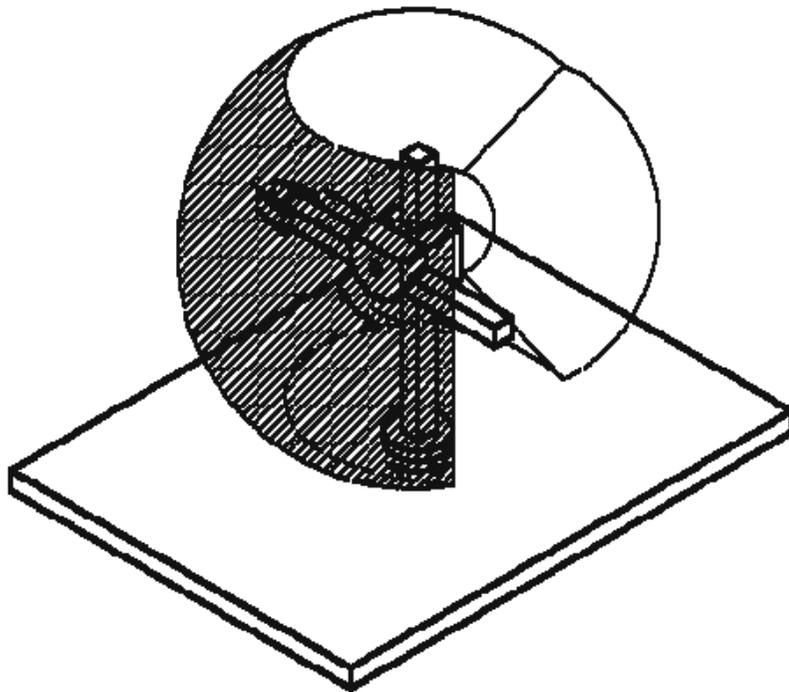
✓ Le relazioni precedenti insieme all'equazione ripetuta a fianco confermano, che una volta stabiliti x_p e y_p , resta fissato l'orientamento della pinza

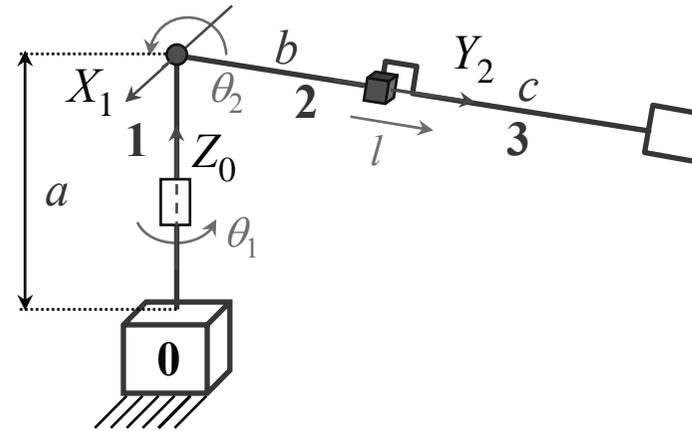
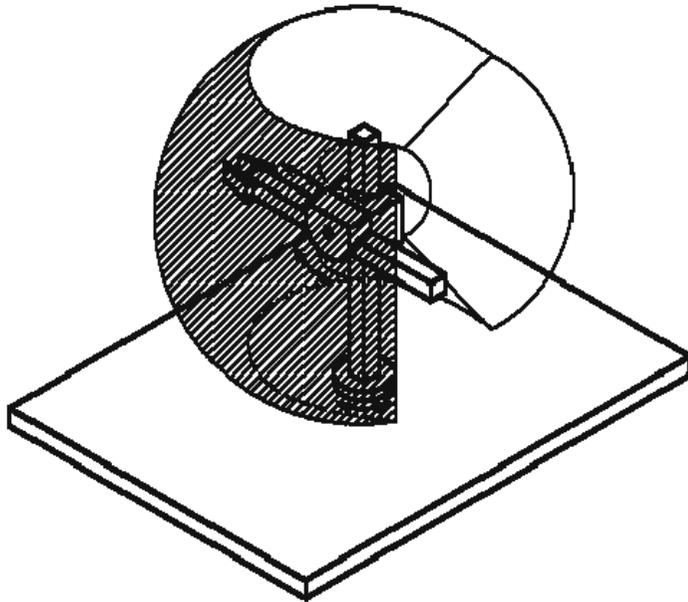
$$\Rightarrow \psi = \theta_1 + \theta_2$$

ROBOT SFERICO CON 3 GRADI DI MOBILITÀ

Soluzione del problema cinematico diretto e inverso per la posizione per una **struttura portante sferica**

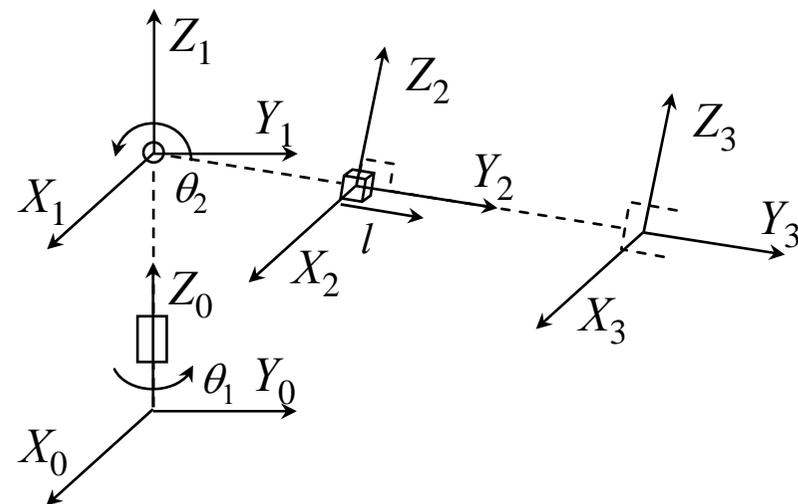
- **3 gradi di mobilità**
- **2 accoppiamenti rotoidali** con assi normali tra loro
- **1 accoppiamento prismatico** con asse normale all'asse del giunto rotoidale precedente



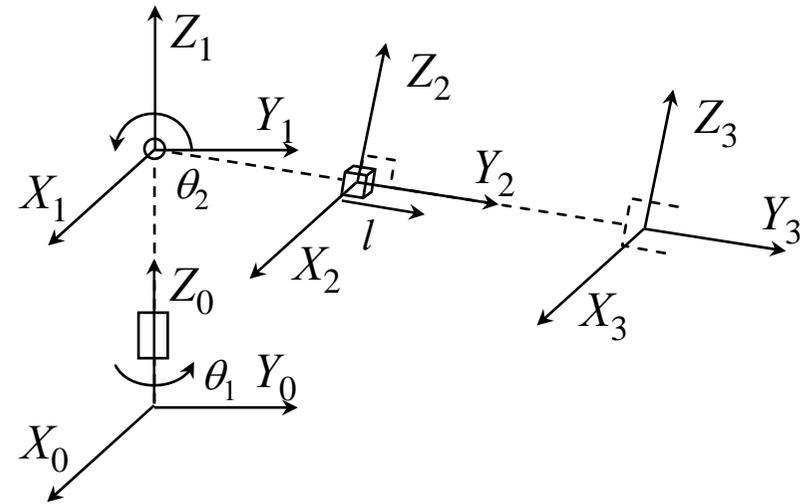


Per la soluzione del problema cinematico diretto e inverso per la posizione assumiamo

- posizionamento arbitrario delle terne
- coordinate dei giunti $\mathbf{Q} \rightarrow \theta_1, \theta_2 \text{ e } l$
- coordinate esterne $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{M}_{03}$



Calcolo della matrice \mathbf{M}_{03} note le coordinate dei giunti θ_1 , θ_2 e l



Ponendo $\rightarrow \begin{cases} s_i = \sin \theta_i \\ c_i = \cos \theta_i \end{cases}$

$$\mathbf{M}_{01} = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{M}_{12} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 & b c_2 \\ 0 & s_2 & c_2 & b s_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{M}_{23} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l + c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{M}_{03} = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 c_2 & s_1 s_2 & -s_1 c_2 (l + c) - b s_1 c_2 \\ s_1 & c_1 c_2 & -c_1 s_2 & c_1 c_2 (l + c) + b c_1 c_2 \\ 0 & s_2 & c_2 & s_2 (l + c) + b s_2 + a \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

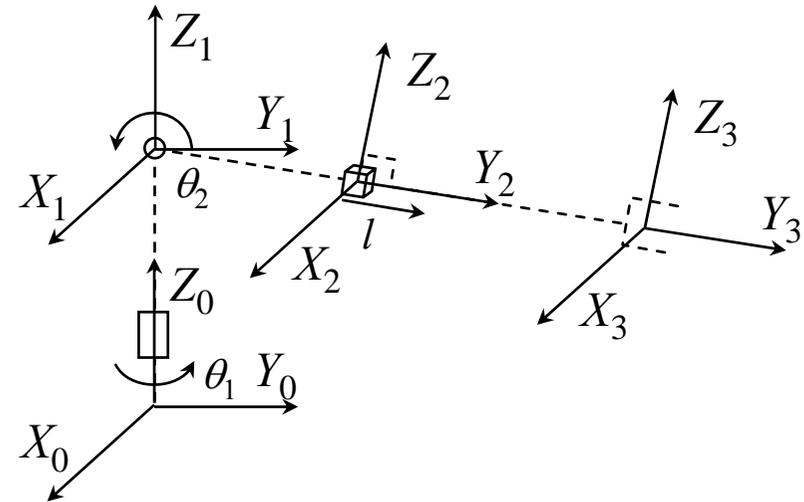


$$\begin{cases} x_p = -s_1 c_2 (l + c) - b s_1 c_2 \\ y_p = c_1 c_2 (l + c) + b c_1 c_2 \\ z_p = s_2 (l + c) + b s_2 + a \end{cases}$$

Calcolo delle coordinate dei giunti

θ_1 , θ_2 e l nota la matrice $\mathbf{M}_{03}(\mathbf{S})$

- La pinza ha **3 GDL** e quindi la posa si descrive con le 3 coordinate x_p, y_p, z_p
- È necessario scrivere **3 equazioni indipendenti**



$$\mathbf{M}_{03}(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & x_p \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & y_p \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & z_p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{03}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1c_2 & s_1s_2 & -s_1c_2(l+c) - bs_1c_2 \\ s_1 & c_1c_2 & -c_1s_2 & c_1c_2(l+c) + bc_1c_2 \\ 0 & s_2 & c_2 & s_2(l+c) + bs_2 + a \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo le coordinate della pinza $\rightarrow x_p, y_p, z_p$

$$\begin{cases} x_p = -s_1c_2(l+c) - bs_1c_2 \\ y_p = c_1c_2(l+c) + bc_1c_2 \\ z_p = s_2(l+c) + bs_2 + a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_p = -s_1c_2(l+c+b) \\ y_p = c_1c_2(l+c+b) \\ z_p - a = s_2(l+c+b) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_p^2 = [s_1c_2(l+c+b)]^2 \\ y_p^2 = [c_1c_2(l+c+b)]^2 \\ (z_p - a)^2 = [s_2(l+c+b)]^2 \end{cases}_{40}$$

- Sommando le precedenti espressioni al quadrato si ha

$$\begin{aligned} x_p^2 + y_p^2 + (z_p - a)^2 &= s_1^2 [c_2(l + c + b)]^2 + c_1^2 [c_2(l + c + b)]^2 + [s_2(l + c + b)]^2 = \\ &= c_2^2 [(l + c + b)]^2 + s_2^2 [(l + c + b)]^2 = [(l + c + b)]^2 \end{aligned}$$

- Per l esistono **2 soluzioni** (l_1 e l_2) \rightarrow $^{1,2}l = \pm \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + (z_p - a)^2} - c - b$

- Per ciascun valore di l_i si trovano 2 valori di θ_2 e quindi complessivamente 4 valori

$$z_p - a = s_2(l + c + b) \rightarrow \theta_2 = \arcsin\left(\frac{z_p - a}{l + c + b}\right) = \arcsin\left(\frac{z_p - a}{\pm \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + (z_p - a)^2}}\right)$$

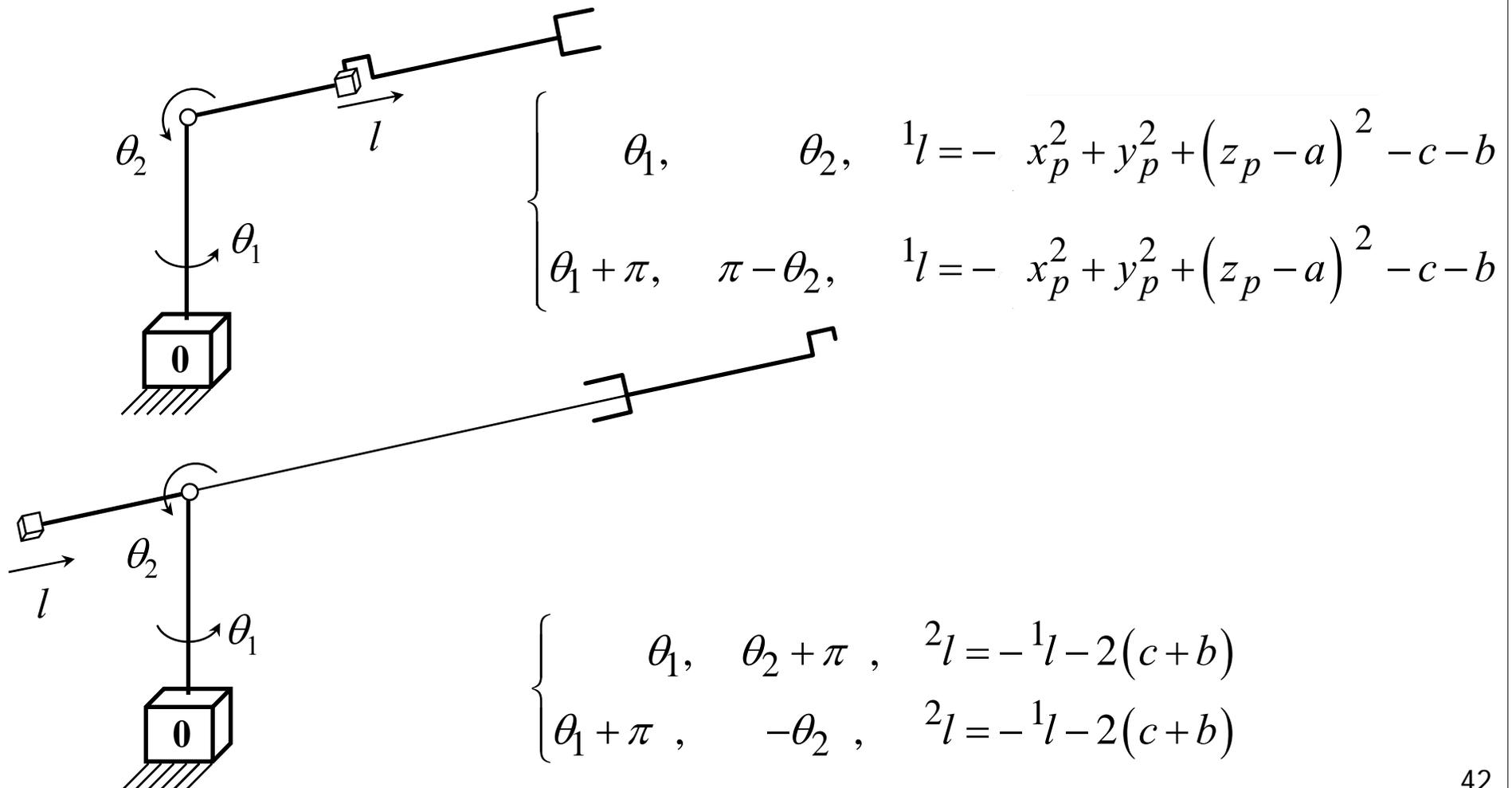
- che fornisce le **4 soluzioni** $^1l \rightarrow \theta_2 = \begin{cases} \theta_2 \\ \pi - \theta_2 \end{cases}$, $^2l \rightarrow \theta_2 = \begin{cases} -\theta_2 = 2\pi - \theta_2 \\ \pi + \theta_2 \end{cases}$

- Per θ_1 si hanno 2 valori \rightarrow

$$\theta_1 = \text{atan2}\left(\frac{-x_p}{c_2(l + c + b)}, \frac{y_p}{c_2(l + c + b)}\right)$$

Il problema cinematico inverso per la posizione fornisce **4 soluzioni**

- Assegnati x_p, y_p e $z_p \rightarrow$ 4 insiemi di θ_1, θ_2 e l soddisfano la posa, cioè esistono **4 posture del robot che soddisfano la posa della pinza**
- Questo risultato può essere visto geometricamente



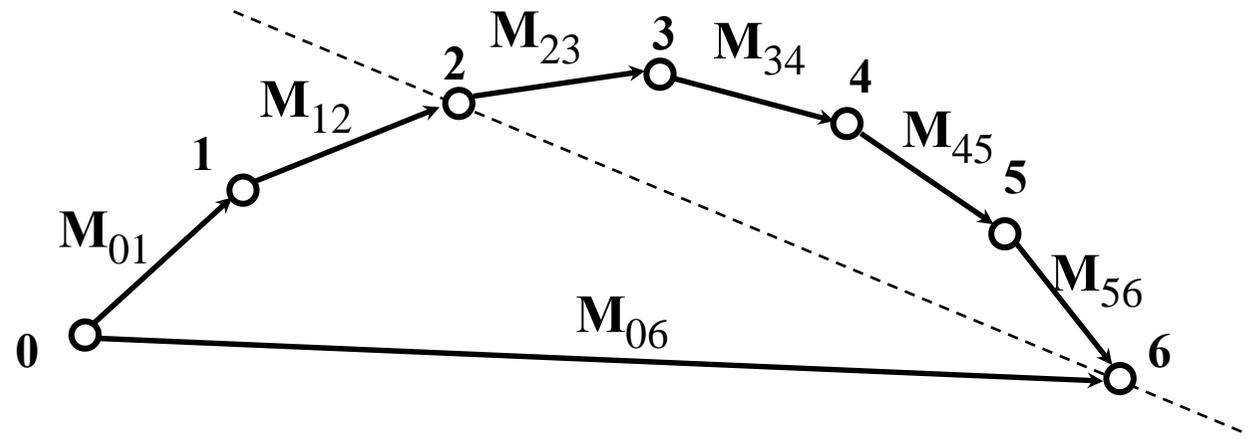
CINEMATICA INVERSA PER LA POSIZIONE: SOLUZIONE ANALITICA

La soluzione del problema cinematico inverso per la posizione richiede operazioni non standardizzate e a volte complesse e non sempre può essere risolto analiticamente. È utile quindi fornire ulteriori nozioni.

- È conveniente, se possibile, la **soluzione analitica**
 - ❖ calcolo più veloce delle q_i se si dispone di equazioni
 - ❖ determinazione del numero di soluzioni
- Il **metodo di soluzione** del problema inverso per la posizione va ricercato **caso per caso**
- Per i manipolatori che ammettono una soluzione analitica è opportuno stabilire delle procedure il più possibile automatiche
- La ricerca della soluzione in forma analitica può essere facilitata da alcune metodologie

È una procedura che aiuta a scrivere le equazioni necessarie alla soluzione

- Consideriamo un manipolatore con **6 gradi di mobilità** e **6 GdL**
- Rappresentiamo la catena cinematica di un manipolatore con un **grafo**
- **Tagliamo il grafo** per esempio con una linea passante per i membri **2** e **6**

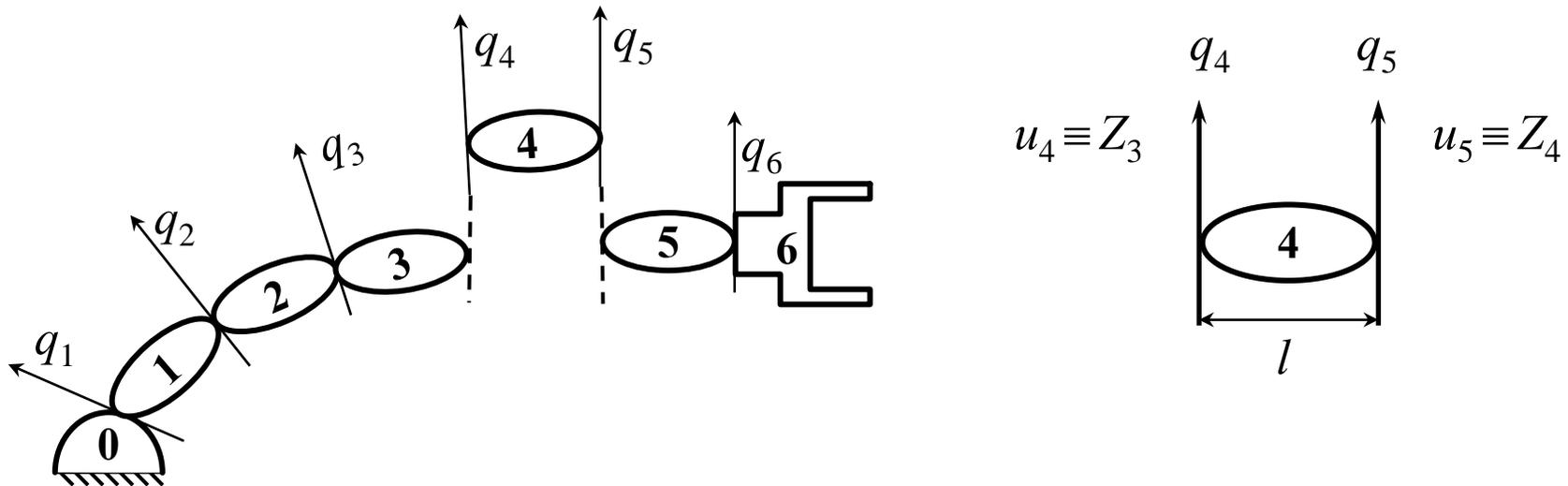


- Si può scrivere percorrendo da **2** → **6** e da **6** → **2** seguendo i 2 percorsi possibili

$$\mathbf{M}_{23} \mathbf{M}_{34} \mathbf{M}_{45} \mathbf{M}_{56} = \mathbf{M}_{12}^{-1} \mathbf{M}_{01}^{-1} \mathbf{M}_{06} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}_{56}^{-1} \mathbf{M}_{45}^{-1} \mathbf{M}_{34}^{-1} \mathbf{M}_{23}^{-1} = \mathbf{M}_{06}^{-1} \mathbf{M}_{01} \mathbf{M}_{12}$$
- Per un manipolatore con n gradi di mobilità $n(n-1)/2$ tagli diversi
- Si hanno $n(n-1)$ relazioni matriciali equivalenti con forma diversa
- tra le quali si possono cercare le relazioni scalari più convenienti

Deriva dal metodo di Paul e ne costituisce un'evoluzione

- Consiste nel fare tagli convenienti al grafo di Paul
- **Si estrae un membro** che abbia una **struttura opportuna**: ad esempio supponiamo che il membro 4 abbia due accoppiamenti rotoidali con assi paralleli



- Si ottiene $\mathbf{M}_{34} = \mathbf{M}_{23}^{-1} \mathbf{M}_{12}^{-1} \mathbf{M}_{01}^{-1} \mathbf{M}_{06} \mathbf{M}_{56}^{-1} \mathbf{M}_{45}^{-1}$ che sinteticamente e indicando le dipendenze funzionali si scrive

$$\mathbf{M}_{34}(q_4) = \mathbf{M}(q_3, q_2, q_1, \mathbf{S}, q_6) \mathbf{M}_{45}^{-1}(q_5)$$

- La sottomatrice di rotazione di $\mathbf{M}_{34} \rightarrow \mathbf{R}_{34}$ contiene quattro $\mathbf{0}$ e un $\mathbf{1}$, se si adotta per esempio la convenzione di Denavit-Hartenberg per la collocazione delle terne si ha, essendo $\theta_i = q_4$ e $\alpha_i = \alpha_4 = 0$

$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{R}_{34} = \begin{bmatrix} cq_4 & -sq_4 & 0 \\ sq_4 & cq_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- La sottomatrice di rotazione di $\mathbf{M}_{45}^{-1} \rightarrow \mathbf{R}_{45}^T$, essendo $\theta_i = q_5$ e $\alpha_i = \alpha_5$, ha in generale l'espressione

$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{R}_{45}^T = \begin{bmatrix} cq_5 & sq_5 & 0 \\ -sq_5 c\alpha_5 & cq_5 c\alpha_5 & s\alpha_5 \\ sq_5 s\alpha_5 & -cq_5 s\alpha_5 & c\alpha_5 \end{bmatrix}$$

- Considerando solo le sottomatrici di rotazione della relazione

$$\mathbf{M}_{34}(q_4) = \mathbf{M}(q_1, q_2, q_3, q_6, \mathbf{S}) \mathbf{M}_{45}^{-1}(q_5)$$

si ha $\rightarrow \mathbf{R}_{34}(q_4) = \mathbf{R}(q_1, q_2, q_3, q_6, \mathbf{S}) \mathbf{R}_{45}^T(q_5)$ essendo $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} cq_4 & -sq_4 & 0 \\ sq_4 & cq_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cq_5 & sq_5 & 0 \\ -sq_5 c\alpha_5 & cq_5 c\alpha_5 & s\alpha_5 \\ sq_5 s\alpha_5 & -cq_5 s\alpha_5 & c\alpha_5 \end{bmatrix}$$

- Dalla relazione matriciale precedente si ricavano le relazioni scalari, non tutte indipendenti, in cui non compaiono le variabili di giunto q_4 e q_5

$$\begin{cases} 0 = r_{12}(q_1, q_2, q_3, q_6, \mathbf{S}) s\alpha_5 + r_{13}(q_1, q_2, q_3, q_6, \mathbf{S}) c\alpha_5 \\ 0 = r_{22}(q_1, q_2, q_3, q_6, \mathbf{S}) s\alpha_5 + r_{23}(q_1, q_2, q_3, q_6, \mathbf{S}) c\alpha_5 \\ 1 = r_{32}(q_1, q_2, q_3, q_6, \mathbf{S}) s\alpha_5 + r_{33}(q_1, q_2, q_3, q_6, \mathbf{S}) c\alpha_5 \end{cases}$$

- Altre relazioni dello stesso tipo si ottengono dalla combinazione di altre relazioni scalari ottenibili dalla relazione matriciale precedente.

- In sintesi la relazione matriciale

$$\mathbf{M}_{34}(q_4) = \mathbf{M}(q_1, q_2, q_3, q_6, \mathbf{S}) \mathbf{M}_{45}^{-1}(q_5)$$

in virtù di elementi nulli o indipendenti dalle variabili di giunto, consente di ottenere relazioni semplici che non dipendono da q_4 e q_5 del tipo

$$\begin{cases} 1 = f_1[q_1, q_2, q_3, q_6, \mathbf{S}] \\ 0 = f_2[q_1, q_2, q_3, q_6, \mathbf{S}] \end{cases}$$

- Ciò deriva dal fatto che gli assi dei giunti 4 e 5 restano sempre paralleli.
- Si può ricavare la seguente **regola**: l'estrazione del membro i consente di trovare equazioni che non dipendono da q_i e q_{i+1}
- Questa tecnica può estendersi nel modo seguente: se due giunti qualsiasi i e j del manipolatore mantengono sempre lo stesso orientamento reciproco, scindere la catena cinematica in corrispondenza di i e j , cioè in corrispondenza dei membri i e $j-1$, permette di trovare equazioni in cui non compaiono le variabili di giunto $q_i, q_{i+1}, \dots, q_{j-1}, q_j$.

CINEMATICA DIFFERENZIALE INVERSA

È utile richiamare il problema cinematico inverso prima di introdurre il **problema cinematico inverso per la velocità e l'accelerazione**

- Consiste nel calcolare le q_i , \dot{q}_i e \ddot{q}_i per ogni giunto partendo dalla posizione, velocità e accelerazione assolute della pinza espresse nelle coordinate esterne $\rightarrow \mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, \ddot{\mathbf{S}}$
- Esprimendo le matrici $\rightarrow \mathbf{M}_{0n}(\mathbf{S})$, $\mathbf{W}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}})$ e $\mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, \ddot{\mathbf{S}})$ in funzione delle matrici di posizione, velocità e accelerazione relative tra i membri funzioni delle q_i , \dot{q}_i e \ddot{q}_i , si ottengono le relazioni

$$\mathbf{M}_{0n}(\mathbf{S}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{M}_{i-1,i}(q_i), \quad \mathbf{W}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{W}_{i-1,i}^{(0)}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)}(\mathbf{Q}) \dot{q}_i$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{H}_{0n}^{(0)}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, \ddot{\mathbf{S}}) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_{i-1,i}^{(0)}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}) + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{W}_{k-1,k}^{(0)}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \mathbf{W}_{j-1,j}^{(0)}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)}(\mathbf{Q}) \ddot{q}_i + \mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)2}(\mathbf{Q}) \dot{q}_i^2 \right) + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{L}_{k-1,k}^{(0)}(\mathbf{Q}) \mathbf{L}_{j-1,j}^{(0)}(\mathbf{Q}) \dot{q}_k \dot{q}_j \end{aligned} \right.$$

- Le matrici che compaiono nelle relazioni precedenti hanno la struttura

$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \left[\begin{array}{ccc|c} x_{ix} & y_{ix} & z_{ix} & O_{ix} \\ x_{iy} & y_{iy} & z_{iy} & O_{iy} \\ x_{iz} & y_{iz} & z_{iz} & O_{iz} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]^{(i-1)}$$

$$\mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -u_z & u_y & t_x \\ u_z & 0 & -u_x & t_y \\ -u_y & u_x & 0 & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{i-1,i}^{(0)}$$

$$\mathbf{W}_{i-1,i}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\omega_z & \omega_y & V_{0x} \\ \omega_z & 0 & -\omega_x & V_{0y} \\ -\omega_y & \omega_x & 0 & V_{0z} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{i-1,i}^{(0)}$$

$$\mathbf{H}_{i-1,i}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & A_{0x} \\ & \underline{\omega}^2 + \underline{\dot{\omega}} & & A_{0y} \\ & & & A_{0z} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{i-1,i}^{(0)}$$

- Risolto il problema inverso della posizione **Q**, i problemi inversi della velocità e dell'accelerazione sono rispettivamente lineari rispetto a $\dot{\mathbf{Q}}$ e $\ddot{\mathbf{Q}}$

$$\mathbf{W} \leftrightarrow \dot{\mathbf{Q}}$$

$$\mathbf{H} \leftrightarrow \ddot{\mathbf{Q}}$$

CINEMATICA INVERSA PER LA VELOCITÀ

- Consideriamo per le prossime relazioni un sistema di riferimento generico (k) anziché (0)
- Consiste nel **calcolare** le \dot{q}_i per ogni giunto partendo dalla posizione e velocità della pinza, una volta che le q_i sono state già determinate
- Dalla relazione $\rightarrow \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_{i-1,i}^{(k)}(\mathbf{Q}) \dot{q}_i = \mathbf{W}_{0n}^{(k)}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})$ si ottiene

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -u_{z1} & u_{y1} & t_{x1} \\ u_{z1} & 0 & -u_{x1} & t_{y1} \\ -u_{y1} & u_{x1} & 0 & t_{z1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^{(k)} \dot{q}_1 + \dots + \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -u_{zi} & u_{yi} & t_{xi} \\ u_{zi} & 0 & -u_{xi} & t_{yi} \\ -u_{yi} & u_{xi} & 0 & t_{zi} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^{(k)} \dot{q}_i + \\
 & + \dots + \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -u_{zn} & u_{yn} & t_{xn} \\ u_{zn} & 0 & -u_{xn} & t_{yn} \\ -u_{yn} & u_{xn} & 0 & t_{zn} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^{(k)} \dot{q}_n = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\omega_z & \omega_y & V_{0x} \\ \omega_z & 0 & -\omega_x & V_{0y} \\ -\omega_y & \omega_x & 0 & V_{0z} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{0n}^{(k)}
 \end{aligned}$$

- Le **matrici** che compaiono nell'espressione precedente possono essere **riorganizzate** in un funzione delle V_{0x}, V_{0y}, V_{0z} e $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

- Dalla riorganizzazione delle matrici precedenti si ha

$$\begin{bmatrix} t_{x1} & t_{x2} & & t_{xi} & & t_{xn} \\ t_{y1} & t_{y2} & & t_{yi} & & t_{yn} \\ t_{z1} & t_{z2} & \dots & t_{zi} & \dots & t_{zn} \\ u_{x1} & u_{x2} & & u_{xi} & & u_{xn} \\ u_{y1} & u_{y2} & & u_{yi} & & u_{yn} \\ u_{z1} & u_{z2} & & u_{zi} & & u_{zn} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}^{(k)} \Rightarrow \boxed{\mathbf{J}^{(k)}(\mathbf{Q}) \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{V}^{(k)}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})}$$

- se $\mathbf{J}^{(k)}$ è **invertibile** si ottiene

$$\boxed{\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^{(k)}(\mathbf{Q})^{-1} \mathbf{V}^{(k)}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})}$$

- Un'opportuna scelta del riferimento (\mathbf{k}) può semplificare i calcoli.

- ❖ terna (\mathbf{k}) $\rightarrow V_{0x}^{(k)}, V_{0y}^{(k)}$ e $V_{0z}^{(k)}$ non hanno un significato specifico
- ❖ terna ausiliaria (\mathbf{a}) cioè riferimento con orientamento fisso e origine nel centro pinza $\rightarrow V_{0x}^{(k)}, V_{0y}^{(k)}$ e $V_{0z}^{(k)}$ rappresentano la **velocità del centro pinza**, mentre ω rimane invariato

CINEMATICA INVERSA PER L'ACCELERAZIONE

- Anche in questo caso consideriamo per le relazioni un sistema di riferimento generico (\mathbf{k}) anziché ($\mathbf{0}$)
- Consiste nel **calcolare** le \ddot{q}_i per ogni giunto partendo dalla posizione, velocità e accelerazione della pinza, una volta che le q_i e \dot{q}_i sono state già determinate
- Dalla relazione

$$\mathbf{H}_{0n}^{(k)} = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{L}_{i-1,i}^{(k)}(\mathbf{Q}) \ddot{q}_i + \mathbf{L}_{i-1,i}^{(k)2}(\mathbf{Q}) \dot{q}_i^2 \right) + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{L}_{k-1,k}^{(k)}(\mathbf{Q}) \mathbf{L}_{j-1,j}^{(k)}(\mathbf{Q}) \dot{q}_k \dot{q}_j$$

✓ si esplicitano le \ddot{q}_i

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{L}_{i-1,i}^{(k)}(\mathbf{Q}) \ddot{q}_i = \mathbf{H}_{0n}^{(k)}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \ddot{\mathbf{s}}) - \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_{i-1,i}^{(k)2}(\mathbf{Q}) \dot{q}_i^2 - 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{L}_{k-1,k}^{(k)}(\mathbf{Q}) \mathbf{L}_{j-1,j}^{(k)}(\mathbf{Q}) \dot{q}_k \dot{q}_j$$

✓ Il secondo membro è noto, si ha $\rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^n \mathbf{L}_{i-1,i}^{(k)}(\mathbf{Q}) \ddot{q}_i = \tilde{\mathbf{H}}^{(k)}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \ddot{\mathbf{s}})}$

✓ L'espressione è del tutto analoga a quella già ottenuta per la velocità

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{L}_{i-1,i}^{(k)}(\mathbf{Q}) \dot{q}_i = \mathbf{w}_{0n}^{(k)}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})$$

- La relazione nei confronti delle \ddot{q}_i è analoga a quella della velocità, si può quindi riorganizzare l'espressione matriciale in modo da utilizzare i risultati già ottenuti

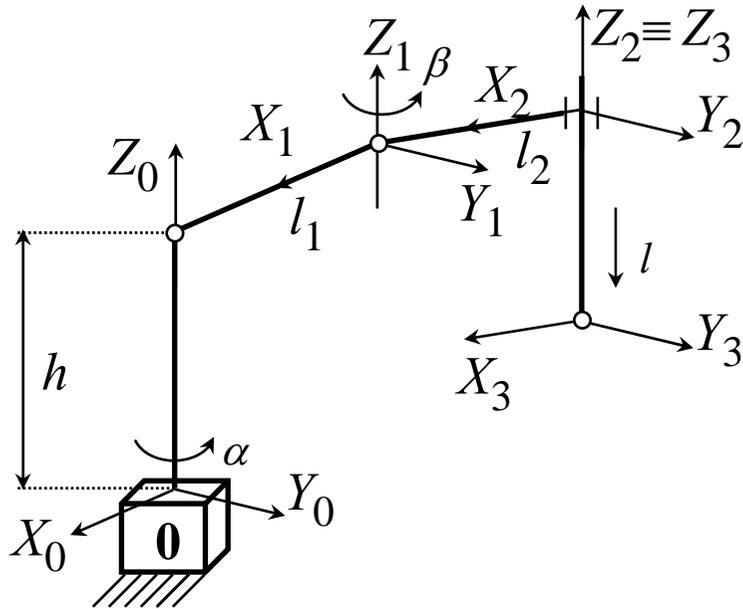
$$\mathbf{J}^{(k)}(\mathbf{Q})\ddot{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} \Rightarrow \ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^{(k)}(\mathbf{Q})^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} \text{ con } \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \tilde{h}_{14} \\ \tilde{h}_{24} \\ \tilde{h}_{34} \\ \tilde{h}_{32} \\ \tilde{h}_{13} \\ \tilde{h}_{21} \end{Bmatrix}^{(k)} \rightarrow \tilde{\mathbf{H}}^{(k)} = \left[\tilde{h}_{ij}^{(k)} \right]$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{L}_{i-1,i}^{(k)}(\mathbf{Q})\ddot{q}_i = \tilde{\mathbf{H}}^{(k)}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \ddot{\mathbf{s}})$$

- La rielaborazione delle matrici permette di utilizzare la matrice $\mathbf{J}^{(k)}$ già calcolata; se $\mathbf{J}^{(k)}$ è invertibile il problema è risolto
- Derivando l'espressione della velocità $\rightarrow \mathbf{J}\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{V}$ si ha

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{A}} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{V}} - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{V}} - \dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{A} - \dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}}$$
 ✓ dalla quale $\rightarrow \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{V}$
- Se scegliamo come riferimento la terna ausiliaria (\mathbf{a}) (con origine nel centro pinza e traslante) i valori che compaiono nell'ultima colonna della $\mathbf{H}_{0n}^{(a)}$ sono le **accelerazioni del centro pinza**

CINEMATICA DIFFERENZIALE PER UN ROBOT SCARA



Coordinate dei giunti

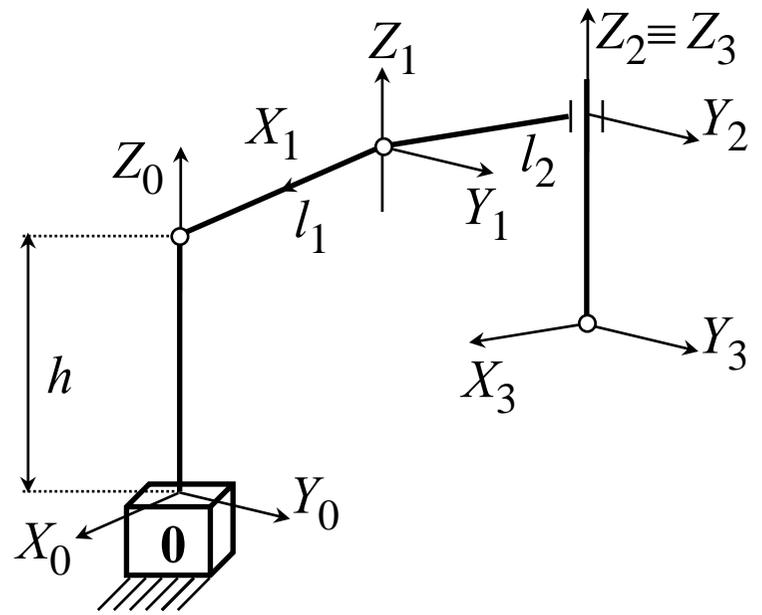
$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ l \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{l} \end{Bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{l} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{01} = \left[\begin{array}{ccc|c} c\alpha & -s\alpha & 0 & l_1 c\alpha \\ s\alpha & c\alpha & 0 & l_1 s\alpha \\ 0 & 0 & 1 & h \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{M}_{12} = \left[\begin{array}{ccc|c} c\beta & -s\beta & 0 & l_2 c\beta \\ s\beta & c\beta & 0 & l_2 s\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{M}_{23} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{M}_{03} = \left[\begin{array}{ccc|c} c(\alpha + \beta) & -s(\alpha + \beta) & 0 & l_2 c(\alpha + \beta) + l_1 c\alpha \\ s(\alpha + \beta) & c(\alpha + \beta) & 0 & l_2 s(\alpha + \beta) + l_1 s\alpha \\ 0 & 0 & 1 & h - l \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



- È utile per gli sviluppi successivi la determinazione delle matrici \mathbf{L} degli assi elicoidali
 - ✓ 2 giunti rotoidali $\rightarrow \mathbf{L}_{01}$ e \mathbf{L}_{12}
 - ✓ 1 giunto prismatico $\rightarrow \mathbf{L}_{23}$

$$\mathbf{L}_{i-1,i}^{(k)} = \mathbf{M}_{ki} \mathbf{L}_{i-1,i}^{(i-1)} \mathbf{M}_{ik}$$

$$\mathbf{L}_{01}^{(0)} = \mathbf{L}_{12}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{L}_{23}^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- È utile esprimere tutte le matrici \mathbf{L} nello stesso sistema di riferimento ($\mathbf{0}$)

$$\mathbf{L}_{12}^{(0)} = \mathbf{M}_{01} \mathbf{L}_{12}^{(1)} \mathbf{M}_{10} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & l_1 s\alpha \\ 1 & 0 & 0 & -l_1 c\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{L}_{23}^{(0)} = \mathbf{M}_{02} \mathbf{L}_{23}^{(2)} \mathbf{M}_{20} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- Calcolo della matrice $\mathbf{W}_{03}^{(0)}$ in funzione delle coordinate dei giunti $\dot{\mathbf{Q}}$

$$\mathbf{W}_{03}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)} \dot{q}_i$$

- Le matrici di velocità relative sono $\rightarrow \mathbf{W}_{01}^{(0)} = \mathbf{L}_{01}^{(0)} \dot{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \dot{\alpha}$

$$\mathbf{W}_{12}^{(0)} = \mathbf{L}_{12}^{(0)} \dot{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & | & l_1 s \alpha \\ 1 & 0 & 0 & | & -l_1 c \alpha \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \dot{\beta}, \quad \mathbf{W}_{23}^{(0)} = \mathbf{L}_{23}^{(0)} \dot{i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \dot{i}$$

- La matrice che permette di conoscere la distribuzione di velocità dell'organo terminale è

$$\mathbf{W}_{03}^{(0)} = \mathbf{W}_{01}^{(0)} + \mathbf{W}_{12}^{(0)} + \mathbf{W}_{23}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} - \dot{\beta} & 0 & | & l_1 \dot{\beta} s \alpha \\ \dot{\alpha} + \dot{\beta} & 0 & 0 & | & -l_1 \dot{\beta} c \alpha \\ 0 & 0 & 0 & | & -\dot{i} \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\omega}} & | & \underline{\mathbf{V}}_0 \\ \hline 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

▪ La **velocità del centro pinza** si può ottenere $\rightarrow \dot{\mathbf{P}}_P^{(0)} = \mathbf{W}_{03}^{(0)} \mathbf{P}_P^{(0)}$

4
2

$$\dot{\mathbf{P}}_P^{(0)} = \mathbf{W}_{03}^{(0)} \mathbf{P}_P^{(0)} = \mathbf{W}_{03}^{(0)} \mathbf{M}_{03} \mathbf{P}_P^{(3)}$$

$$\mathbf{P}_P^{(0)} = \mathbf{M}_{03} \mathbf{P}_P^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|c} c(\alpha + \beta) & -s(\alpha + \beta) & 0 & l_2 c(\alpha + \beta) + l_1 c\alpha \\ s(\alpha + \beta) & c(\alpha + \beta) & 0 & l_2 s(\alpha + \beta) + l_1 s\alpha \\ 0 & 0 & 1 & h-l \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}^{(3)}$$

$$\mathbf{P}_P^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} l_2 c(\alpha + \beta) + l_1 c\alpha \\ l_2 s(\alpha + \beta) + l_1 s\alpha \\ \hline h-l \\ 1 \end{array} \right\}^{(0)}$$

$$\dot{\mathbf{P}}_P^{(0)} = \mathbf{W}_{03}^{(0)} \mathbf{P}_P^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & -\dot{\alpha} - \dot{\beta} & 0 & l_1 \dot{\beta} & s\dot{\alpha} \\ \dot{\alpha} + \dot{\beta} & 0 & 0 & -l_1 \dot{\beta} & c\dot{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & & -\dot{l} \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array} \right]^{(0)} \left\{ \begin{array}{c} l_2 c(\alpha + \beta) + l_1 c\alpha \\ l_2 s(\alpha + \beta) + l_1 s\alpha \\ \hline h-l \\ 1 \end{array} \right\}^{(0)}$$

- Lo stesso risultato si ottiene usando la **terna ausiliaria (a)** → avente **origine sempre nel centro pinza**, ma **traslante**

$$\mathbf{W}_{03}^{(a)} = \mathbf{M}_{a0} \mathbf{W}_{03}^{(0)} \mathbf{M}_{0a} \Rightarrow \mathbf{M}_{0a} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_3 & {}^3\mathbf{O}_3^{(0)} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & l_2 & c(\alpha + \beta) + l_1 & c\alpha \\ 0 & 1 & 0 & l_2 & s(\alpha + \beta) + l_1 & s\alpha \\ 0 & 0 & 1 & & & h-l \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{W}_{03}^{(a)} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\omega} & \mathbf{V}_{O_3} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_3 & -{}^3\mathbf{O}_3^{(0)} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \underline{\omega} & \mathbf{V}_0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_3 & {}^3\mathbf{O}_3^{(0)} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\omega} & \underline{\omega} {}^3\mathbf{O}_3^{(0)} + \mathbf{V}_0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] =$$

$$\mathbf{W}_{03}^{(a)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\dot{\alpha} - \dot{\beta} & 0 & -l_1 & s\alpha\dot{\alpha} - l_2 & s(\alpha + \beta)(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \\ \dot{\alpha} + \dot{\beta} & 0 & 0 & l_1 & c\alpha\dot{\alpha} + l_2 & c(\alpha + \beta)(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \\ 0 & 0 & 0 & & -\dot{l} & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & 0 \end{array} \right]$$

- Per l'organo terminale si ha →
$$\begin{cases} V_x = -l_1 \sin \alpha \dot{\alpha} - l_2 \sin(\alpha + \beta)(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \\ V_y = l_1 \cos \alpha \dot{\alpha} + l_2 \cos(\alpha + \beta)(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \\ V_z = -\dot{l} \\ \omega_z = \dot{\alpha} + \dot{\beta} \end{cases}$$

Velocità: problema inverso

- Sono assegnate le velocità dell'organo terminale $\rightarrow V_{Px}, V_{Py}, V_{Pz}$ e ω e si vogliono trovare le $\dot{\mathbf{Q}}$
- Equivale a conoscere $\mathbf{W}_{03}^{(a)}$ cioè la matrice di velocità nel riferimento ausiliario (a)
- Utilizziamo l'espressione $\rightarrow \sum_{i=1}^3 \mathbf{L}_{i-1,i}^{(a)}(\mathbf{Q}) \dot{q}_i = \mathbf{W}_{03}^{(a)}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})$
- Occorre calcolare le matrici \mathbf{L} rispetto alla terna (a)

$$\mathbf{L}_{01}^{(a)} = \mathbf{M}_{a0} \mathbf{L}_{01}^{(0)} \mathbf{M}_{0a} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & -l_2 & s(\alpha+\beta)-l_1 & s\alpha \\ 1 & 0 & 0 & l_2 & c(\alpha+\beta)+l_1 & c\alpha \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 & \end{array} \right],$$

$$\mathbf{L}_{12}^{(a)} = \mathbf{M}_{a0} \mathbf{L}_{12}^{(0)} \mathbf{M}_{0a} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & -l_2 & s(\alpha+\beta) & \\ 1 & 0 & 0 & l_2 & c(\alpha+\beta) & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 & \end{array} \right], \quad \mathbf{L}_{23}^{(a)} = \mathbf{M}_{a0} \mathbf{L}_{23}^{(0)} \mathbf{M}_{0a} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array} \right]$$

- Applicando l'espressione $\rightarrow \sum_{i=1}^3 \mathbf{L}_{i-1,i}^{(a)}(\mathbf{Q}) \dot{q}_i = \mathbf{W}_{03}^{(a)}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})$ si ha il risultato 7
2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & -l_2 & s(\alpha + \beta) - l_1 & s\alpha \\ 1 & 0 & 0 & l_2 & c(\alpha + \beta) + l_1 & c\alpha \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 & \end{array} \right] \dot{\alpha} + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & -l_2 & s(\alpha + \beta) & \\ 1 & 0 & 0 & l_2 & c(\alpha + \beta) & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 & \end{array} \right] \dot{\beta} + \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \dot{l}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\omega_z & \omega_y & V_{Px} \\ \omega_z & 0 & -\omega_x & V_{Py} \\ -\omega_y & \omega_x & 0 & V_{Pz} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

nel caso specifico solo le velocità del centro pinza sono assegnate e comunque solo ω_z sarebbe diverso da zero

- L'espressione riorganizzata (**3 GdL**) nella forma $\rightarrow \mathbf{J}^{(a)} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{V}^{(a)}$ fornisce

$$\begin{bmatrix} -l_1 \sin \alpha - l_2 \sin(\alpha + \beta) & -l_2 \sin(\alpha + \beta) & 0 \\ l_1 \cos \alpha + l_2 \cos(\alpha + \beta) & l_2 \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{l} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{Px} \\ V_{Py} \\ V_{Pz} \end{Bmatrix}$$

- La soluzione si ottiene invertendo lo jacobiano $\rightarrow \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^{(a)-1} \mathbf{V}^{(a)}$

- Calcolo della matrice $\mathbf{H}_{03}^{(0)}$ in funzione delle coordinate dei giunti $\ddot{\mathbf{Q}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{03}^{(0)} &= \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)}(\mathbf{Q}) \ddot{q}_i + \mathbf{L}_{i-1,i}^{(0)2}(\mathbf{Q}) \dot{q}_i^2 \right) + 2 \sum_{j=2}^3 \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{L}_{k-1,k}^{(0)}(\mathbf{Q}) \mathbf{L}_{j-1,j}^{(0)}(\mathbf{Q}) \dot{q}_k \dot{q}_j = \\ &= \mathbf{L}_{01}^{(0)} \ddot{\alpha} + \mathbf{L}_{01}^{(0)2} \dot{\alpha}^2 + \mathbf{L}_{12}^{(0)} \ddot{\beta} + \mathbf{L}_{12}^{(0)2} \dot{\beta}^2 + \mathbf{L}_{23}^{(0)} \ddot{i} + \underbrace{\mathbf{L}_{23}^{(0)2}}_0 \dot{i}^2 + 2 \left[\underbrace{\mathbf{L}_{01}^{(0)} \mathbf{L}_{12}^{(0)}}_0 \dot{\alpha} \dot{\beta} + \underbrace{\mathbf{L}_{01}^{(0)} \mathbf{L}_{23}^{(0)}}_0 \dot{\alpha} \dot{i} + \underbrace{\mathbf{L}_{12}^{(0)} \mathbf{L}_{23}^{(0)}}_0 \dot{\beta} \dot{i} \right] \end{aligned}$$

- Occorre calcolare $\rightarrow \mathbf{L}_{01}^{(0)2}, \mathbf{L}_{12}^{(0)2}, \mathbf{L}_{23}^{(0)2}$ e i prodotti $\rightarrow \mathbf{L}_{01}^{(0)} \mathbf{L}_{12}^{(0)}, \mathbf{L}_{01}^{(0)} \mathbf{L}_{23}^{(0)}, \mathbf{L}_{12}^{(0)} \mathbf{L}_{23}^{(0)}$

❖ Risultano nulli

$$\mathbf{L}_{23}^{(0)2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \mathbf{L}_{01}^{(0)} \mathbf{L}_{23}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{L}_{12}^{(0)} \mathbf{L}_{23}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & | & l_1 & s\alpha \\ 1 & 0 & 0 & | & -l_1 & c\alpha \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- Risultano invece diversi da zero

$$\mathbf{L}_{12}^{(0)2} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & l_1 s \alpha \\ 1 & 0 & 0 & -l_1 c \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & l_1 s \alpha \\ 1 & 0 & 0 & -l_1 c \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & l_1 c \alpha \\ 0 & -1 & 0 & l_1 s \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{L}_{01}^{(0)2} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{L}_{01}^{(0)} \mathbf{L}_{12}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & l_1 s \alpha \\ 1 & 0 & 0 & -l_1 c \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & l_1 c \alpha \\ 0 & -1 & 0 & l_1 s \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- Eliminando i termini nulli ed eseguendo i calcoli si ha

$$\mathbf{H}_{03}^{(0)} = \mathbf{L}_{01}^{(0)} \ddot{\alpha} + \mathbf{L}_{12}^{(0)} \ddot{\beta} + \mathbf{L}_{23}^{(0)} \ddot{i} + \mathbf{L}_{01}^{(0)2} \dot{\alpha}^2 + \mathbf{L}_{12}^{(0)2} \dot{\beta}^2 + 2\mathbf{L}_{01}^{(0)} \mathbf{L}_{12}^{(0)} \dot{\alpha} \dot{\beta}$$

$$\mathbf{H}_{03}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} -(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 & -(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) & 0 & \ddot{\beta} l_1 \sin \alpha + \dot{\beta}^2 l_1 \cos \alpha + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} l_1 \cos \alpha \\ \ddot{\alpha} + \ddot{\beta} & -(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 & 0 & -\ddot{\beta} l_1 \cos \alpha + \dot{\beta}^2 l_1 \sin \alpha + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\ddot{i} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- L'accelerazione del centro pinza è $\ddot{\mathbf{P}}_p^{(0)} = \mathbf{H}_{03}^{(0)} \mathbf{P}_p^{(0)}$

$${}^3\mathbf{A}_p^{(0)} = {}^3\ddot{\mathbf{P}}_p^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} l_2 \left[-(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \sin(\alpha + \beta) - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \cos(\alpha + \beta) \right] + l_1 \left[-\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \right] \\ l_2 \left[(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \cos(\alpha + \beta) - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \sin(\alpha + \beta) \right] + l_1 \left[\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \right] \\ -\ddot{i} \end{array} \right\}$$

- Lo stesso risultato si raggiunge esprimendo la matrice delle accelerazioni rispetto alla **terna ausiliaria (a)** $\rightarrow \mathbf{H}_{03}^{(a)}$ la cui 4^a colonna fornisce direttamente l'accelerazione del centro pinza

- Assegnate le accelerazioni dell'organo terminale $\rightarrow A_x, A_y, A_z$, si vogliono trovare le $\ddot{\mathbf{Q}}$

- Equivale a conoscere $\mathbf{H}_{03}^{(a)}$ cioè la matrice di accelerazione nel riferimento ausiliario (a)

- Usiamo l'espressione che si ottiene da quella ricavata eliminando i termini

nulli $\rightarrow \mathbf{H}_{03}^{(0)} = \mathbf{L}_{01}^{(0)}\ddot{\alpha} + \mathbf{L}_{12}^{(0)}\ddot{\beta} + \mathbf{L}_{23}^{(0)}\ddot{l} + \mathbf{L}_{01}^{(0)2}\dot{\alpha}^2 + \mathbf{L}_{12}^{(0)2}\dot{\beta}^2 + 2\mathbf{L}_{01}^{(0)}\mathbf{L}_{12}^{(0)}\dot{\alpha}\dot{\beta}$

pre- e post-moltiplicando per \mathbf{M}_{a0} e \mathbf{M}_{0a} e ordinando opportunamente

$$\mathbf{L}_{01}^{(a)}\ddot{\alpha} + \mathbf{L}_{12}^{(a)}\ddot{\beta} + \mathbf{L}_{23}^{(a)}\ddot{l} = \mathbf{H}_{03}^{(a)} - \mathbf{L}_{01}^{(a)2}\dot{\alpha}^2 - \mathbf{L}_{12}^{(a)2}\dot{\beta}^2 - 2\mathbf{L}_{01}^{(a)}\mathbf{L}_{12}^{(a)}\dot{\alpha}\dot{\beta}$$

- $\mathbf{L}_{01}^{(a)}, \mathbf{L}_{12}^{(a)}, \mathbf{L}_{23}^{(a)}$ sono state già calcolate risolvendo il problema inverso della velocità, occorre calcolare $\rightarrow \mathbf{L}_{01}^{(a)2}, \mathbf{L}_{12}^{(a)2}$ e il prodotto $\rightarrow \mathbf{L}_{01}^{(a)}\mathbf{L}_{12}^{(a)}$

$$\mathbf{L}_{01}^{(a)2} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -l_2s(\alpha + \beta) - l_1s\alpha \\ 1 & 0 & 0 & l_2c(\alpha + \beta) + l_1c\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -l_2s(\alpha + \beta) - l_1s\alpha \\ 1 & 0 & 0 & l_2c(\alpha + \beta) + l_1c\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -l_2c(\alpha + \beta) - l_1c\alpha \\ 0 & -1 & 0 & -l_2s(\alpha + \beta) - l_1s\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- Calcolo delle altre matrici

$$\mathbf{L}_{12}^{(a)2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -l_2 s(\alpha + \beta) \\ 1 & 0 & 0 & l_2 c(\alpha + \beta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -l_2 s(\alpha + \beta) \\ 1 & 0 & 0 & l_2 c(\alpha + \beta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -l_2 c(\alpha + \beta) \\ 0 & -1 & 0 & -l_2 s(\alpha + \beta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{01}^{(a)} \mathbf{L}_{12}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -l_2 s(\alpha + \beta) - l_1 s \alpha \\ 1 & 0 & 0 & l_2 c(\alpha + \beta) + l_1 c \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -l_2 s(\alpha + \beta) \\ 1 & 0 & 0 & l_2 c(\alpha + \beta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -l_2 c(\alpha + \beta) \\ 1 & 0 & 0 & -l_2 s(\alpha + \beta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sostituendo le matrici calcolate in

$$\mathbf{L}_{01}^{(a)} \ddot{\alpha} + \mathbf{L}_{12}^{(a)} \ddot{\beta} + \mathbf{L}_{23}^{(a)} \ddot{l} = \mathbf{H}_{03}^{(a)} - \mathbf{L}_{01}^{(a)2} \dot{\alpha}^2 - \mathbf{L}_{12}^{(a)2} \dot{\beta}^2 - 2\mathbf{L}_{01}^{(a)} \mathbf{L}_{12}^{(a)} \dot{\alpha} \dot{\beta}$$

si ottiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\ddot{\alpha} - \ddot{\beta} & 0 & \ddot{\alpha}(-l_2 \sin(\alpha + \beta) - l_1 \sin \alpha) - \ddot{\beta}l_2 \sin(\alpha + \beta) \\ \ddot{\alpha} + \ddot{\beta} & 0 & 0 & \ddot{\alpha}(l_2 \cos(\alpha + \beta) + l_1 \cos \alpha) + \ddot{\beta}l_2 \cos(\alpha + \beta) \\ 0 & 0 & 0 & -\ddot{l} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\omega^2 + \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} & -\dot{\omega} & 0 & A_x + (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta})l_2 \cos(\alpha + \beta) + \dot{\alpha}^2 l_1 \cos \alpha \\ \dot{\omega} & -\omega^2 + \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} & 0 & A_y + (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta})l_2 \sin(\alpha + \beta) + \dot{\alpha}^2 l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & A_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

▪ che si riorganizza (3 GdL) nella forma $\rightarrow \mathbf{J}^{(a)}\ddot{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{A}}^{(a)} \rightarrow \ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^{(a)-1}\tilde{\mathbf{A}}^{(a)}$

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}(-l_2 \sin(\alpha + \beta) - l_1 \sin \alpha) - \ddot{\beta}l_2 \sin(\alpha + \beta) = A_x + (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta})l_2 \cos(\alpha + \beta) + \dot{\alpha}^2 l_1 \cos \alpha \\ \ddot{\alpha}(l_2 \cos(\alpha + \beta) + l_1 \cos \alpha) + \ddot{\beta}l_2 \cos(\alpha + \beta) = A_y + (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta})l_2 \sin(\alpha + \beta) + \dot{\alpha}^2 l_1 \sin \alpha \\ -\ddot{l} = A_z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -l_1 \sin \alpha - l_2 \sin(\alpha + \beta) & -l_2 \sin(\alpha + \beta) & 0 \\ l_1 \cos \alpha + l_2 \cos(\alpha + \beta) & l_2 \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{l} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \\ \tilde{A}_z \end{Bmatrix}$$

▪ In alternativa si calcola $\rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^{(a)} = \mathbf{A}^{(a)} - \mathbf{j}^{(a)}\mathbf{J}^{(a)-1}\mathbf{V}^{(a)}$